

دراسات في التحليل الكمي

الجزء الأول

الأستاذ الدكتور

عادل عبد الحميد عز

١٩٩٤

دراسات في التحليل الرمى

الجزء الاول

الأستاذ الدكتور

عادل عبد الحميد عز

١٩٩٤

مقدمة :

تتخذ الإنسان الكثير من القرارات في حياته اليومية ... ولكن يلاحظ أن بعض هذه القرارات يتخذ بطرق كبقية تعتمد على خبرة الإنسان في الماضي والمعلومات المخزنة في عقله وبعض العناصر أو المعلومات الشخصية المتاحة ولكن من ناحية أخرى يمكن اتخاذ القرارات بالاعتماد على الأساليب الكمية أو ما يمكن أن نطلق عليه أساليب التحليل الكمي - وهي تعتمد بصفة أساسية على بعض الأساليب الرياضية والإحصائية وأساليب بحوث العمليات وما يطلق عليه علم الإدارة .

ومما لفت الأنس والاسان سحذ الكسر من القرارات بالطرق الرياضية بغض النظر عن مستوى الرياضيات المستخدمة - ولكننا نلاحظ التطور الكبير الذي حدث منذ بدايه القرن الحالى وأدى الى التوسع فى إستخدام الأساليب الرياضية فى إسخاذ القرارات .

ومما لانسك فيه أن إكتشاف الحاسب الآلى وتطوره جيداً بعد جيل أدى الى توسع كبير فى إستخدام الأساليب الكمية أو الإعتماد عليها بصفة أساسية فى إتخاذ القرارات الإدارية وكانت البداية على يد فردريك تيلور عند بداية هذا القرن ثم اتسع نطاق إستخدامها خلال الحرب العالمية الثانية .

وهما كانت درجة إعتمادنا على الأساليب الكمية فى إتخاذ القرارات إلا أننا لا نستطيع أن نغفل التأثير من العوامل النفسية والشخصية التى تحكم إتخاذ القرار فمثلاً عند الإعتماد على الأساليب الكمية لبقدر السكان فى المستقبل .. هل يستطيع أن يغفل سياسة الدولة تجاه القضية السكانية ؟ - عند تقدير الدخل فى المستقبل هل يستطيع أن يغفل التأثير من القرارات الاقتصادية التى تتخذها الدولة و دور على هذه التقديرات ؟

وعموما فإنه من المستحيل الإعتماد على الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات
 • مدير الموارد البشرية الإحصائية الدقيقة واللزمية والتي تعتمد عليها مبدإ اتخاذ
 القرارات باستخدام أساليب التحليل الكمي ونظم دعم القرارات .

كما يجدر الإشارة إلى أن نظم المعلومات الإدارية السليمة والتي تعتبرها الطريق
 المسطوح للحصول على المعلومات الصحيحة لكل من يحتاج إليها من رجال الإدارة في
 الوقت المناسب والمكان المناسب .

وفد رأيت من واجبي أن أسجل بعض المعلومات اللازمة لأساليب التحليل
 الكمي من ريادة وإحصائية لطلاب الإدارة .

والله ولي التوفيق

الفصل الأول
الآوساط والمقدمة الإحصائية

الفصل الأول

مقاييس النزعة المركزية

يهتم علم الإحصاء بتجميع البيانات الإحصائية عن ظاهرة معينة ثم تبويب هذه البيانات وعرضها بأسلوب لائق يستفيد منه متخذ القرار ثم تحليل هذه البيانات وسنهتم في هذا الفصل بمقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendency

توجد أنواع كثيرة من المتوسطات أهمها :

١- الوسط الحسابي Mean :

الوسط الحسابي \bar{x} لمجموعة من القيم $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ هو :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

مثال ١ :

إذا أخذنا دخول الأفراد أ، ب، ج، د، هـ وكانت ٢٠٠، ١٨٠٠، ١٠٠٠، ١٥٠٠، ٥٠٠

$$\text{وأن الوسط الحسابي } \bar{x} = \frac{200 + 1800 + 1000 + 1500 + 500}{5} = 1000 \text{ جنيه}$$

٢- وكذلك نجد أن مجموع إنحرافات هذه القيم عن الوسط = صفر

كل قيمة قد تتساوى مع الوسط الحسابي مثل دخل ج = ١٠٠٠ جنيه أو تقل

عنه مثل دخل أ = ٢٠٠ جنيه، هـ = ٥٠٠ جنيه أو تزيد عنه مثل دخل كل من

ب، د = ١٨٠٠، ١٥٠٠ على الترتيب .

ولكن إذا قمنا بحساب مجمل إحصافات قيم دخل كل فرد عن الوسط الحسابي
لوجدنا أن المجموع = صفر ٠٠٠٠ كما يتضح من الجدول التالي :

الأفراد	الدخول	الإحصاف عن الوسط الحسابي
أ	٥٠٠	٥٠٠ -
ب	١٥٠٠	٥٠٠ +
ج	١٠٠٠	صفر
د	١٨٠٠	٨٠٠ +
هـ	٢٠٠	٨٠٠ -
		<hr/>
		صفر

وهي ظاهرة عامة مهما كانت قيم المفردات .

ومن الظواهر الهامة أيضا أننا يمكن أن نختار وسطا فرضيا ، ثم نحصل على
مجموع إحصافات قيم المفردات عن هذا الوسط الفرضي .

الوسط الفرضي = ض

الإحصاف = ح

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع}}{ن}$ + ض

في المثال السابق :

نفرض أننا قدرنا الوسط الفرضي بمبلغ ٩٠٠ جنيه .: ض = ٩٠٠ جنيه

إحصافات أ ، ب ، ج ، د ، هـ عن الوسط الفرضي =

$$٥٠٠ = ١١٠٠ - ١٦٠٠ = ٧٠٠ - ٩٠٠ + ١٠٠ + ٦٠٠ + ٤٠٠ -$$

الوسط الحسابي = $\frac{\text{مجموع}}{n} + \text{ض}$

$$1.000 = 1.00 + 1.00 = \frac{500}{5} + 1.00 =$$

الوسط الحسابي للبيانات المعطاة :

فيما يلي جدول توزيع تكراري لدخول 1000 عامل في أحد الفنادق شهرياً :

فئات	عدد العاملين	مركز الفئة	ف x ك
	ك	ف	
أقل من 500	50	250	12500
500 وأقل من 1000	100	750	75000
1000 وأقل من 1500	500	1250	625000
1500 وأقل من 2000	200	1750	350000
2000 وأقل من 2500	100	2250	225000
2500 وأقل من 3000	50	2750	137500
			<hr/>
	1000		1425000

$$1425 = \frac{1425000}{1000} = \text{الوسط الحسابي}$$

الوسيط

الوسيط هو القيمة الوسطى

مثال :

إذا كانت دمول أ، ب، ج، د، هـ هي ٣٠٠، ٢٠٠، ١٥٠، ٤٠٠، ٢٥٠ فإنه للحصول على الوسيط يجب أن ترتب قيم المفردات إما تصاعدياً أو تنازلياً

الترتيب التصاعدي للقيم : ١٥٠، ٢٠٠، ٢٥٠، ٣٠٠، ٤٠٠ وحيث أن عدد المفردات فردي = ٥ فإن الوسيط هو قيمة المفردة رقم ٣ = ٢٥٠ جنية .

وإذا فرضنا في المثال السابق أن عدد المفردات = رقم زوجي ٦ مثلاً فإن قيمة الوسيط هي متوسط قيمتي المفردة رقم ٣، رقم ٤ كما يلي :

دخول الأفراد هي أ، ب، ج، د، هـ، و = ١٥٠، ٢٠٠، ٣٠٠، ٦٠٠، ٥٥٠، ٤٠٠ ترتيب القيم تصاعدياً ١٥٠، ٢٠٠، ٣٠٠، ٤٠٠، ٥٥٠، ٦٠٠

الوسيط متوسط قيم المفردتين الثالثة والرابعة = $\frac{1}{2} (٣٠٠ + ٤٠٠) = ٣٥٠$

الحصول على قيمة الوسيط للبيانات المبوبة

في هذه الحالة نجد أن مجموع التكرارات هي التي تمثل عدد المفردات - فإذا كان لدينا جدول التوزيع التكراري لاجور ١٠٠ عامل في أحد المصانع (وهو عدد زوجي) والمفردة رقم ٥١ وبهذا تكون هناك ٤٩ مفردة منها أقل، ٤٩ مفردة قيمها أكبر من الوسيط كما يتضح من المثال الآتي :

النكرار	فئات الدخول اليومية بالجنبة
٥	صفر - أقل من ١٠
١٥	١٠ - ٢٠
٣٥ (الفئة الوسيطة)	٢٠ - ٣٠
٢٥	٣٠ - ٤٠
٢٠	٤٠ - ٥٠
١٠٠	

من الواضح أن الفئة الوسيطة هي الفئة من ٢٠ الى أقل من ٣٠ جنبة لأن عدد التكرارات قبلها $٥ + ١٥ = ٢٠$ وبعدها $٢٥ + ٢٠ = ٤٥$

ولكن عندما تنتقل من الفئة الثانية الى الفئة الثالثة فيكون التكرار المجمع للثلاث فئات $٥ + ١٥ + ٣٥ = ٥٥$ وعلى ذلك فقيمة المفردة رقم ٥٠ والمفردة رقم ١٥ تكون موجودة في هذه الفئة ٢٠ الى أقل من ٣٠ ولذلك تسمى هذه الفئة بالفئة الوسيطة أي الفئة التي يوجد بها الوسيط وهذه الفئة الوسيطة تحتوى على ٣٥ مفردة .

مجموع المفردات للفئتين الأولى والثانية $٥ + ١٥ = ٢٠$

للمحصل على قيمة المفردة رقم ٥٠ يبقى لنا

٥٠ مفردة - ٢٠ مفردة = ٣٠ مفردة قيمة المفردة رقم ٥٠ بالنسبة والتناسب

$$٣٠ جنبة - ٢٠ جنبة = \frac{٣٠}{٣٥} \times ٢٠ جنبة$$

$$١٠ جنبة = \frac{٣٠}{٣٥} \times ٣٥ جنبة = ٨,٥٨ جنبة$$

قيمة المفردة رقم ٥٠ = ٢٠ جنية (الحد الأدنى للفئة الوسيطة) = ٨,٥٨ = ٢٨,٥٨ جنية

للحصول على قيمة المفردة رقم ٥١ يطرح ٢٠ تكرار للفئتين الأولى والثانية

من ٥١ نحصل على ٣١

تكرارات الفئة الوسيطة = ٣٥

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \text{طول الفئة الوسيطة} \times \frac{31}{35}$$

$$28,86 = \frac{31}{35} \times 10 + 20 =$$

$$\text{الوسيط} = \frac{1}{2} (28,86 + 28,58) = 28,72 \text{ جنية}$$

ويمكن الوصول الى هذا الرقم باستخدام التكرار المتجمع الصاعد كما يلي :

الفئات التكرارات الحدود العليا للفئات التكرار المتجمع الصاعد

٥	أقل من ١٠	٥	صفر - ١٠
٢٠	أقل من ٢٠	١٥	١٠ - ٢٠
٥٥ — فئة الوسيط	أقل من ٣٠	٣٥	٢٠ - ٣٠
٨٠	أقل من ٤٠	٢٥	٣٠ - ٤٠
١٠٠	أقل من ٥٠	٢٠	٤٠ - ٥٠

١٠٠

المنوال للبيانات المئوية

مثال :

أحسب المنوال من جدول التوزيع التكرارى التالى :

التكرار	الفئات
٥	صفر الى أقل من ١٠
١٥	١٠ - ٢٠
٣٥ -----	٢٠ - ٣٠
٢٥	٣٠ - ٤٠
٢٠	٤٠ - ٥٠
—	
١٠٠	

المنوال = م والحد الأدنى لفئة المنوال = ل

تكرار فئة المنوال = ك

تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة السابقة للمنوال = ك = ٢٠

تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة اللاحقة للمنوال = ك = ١٠

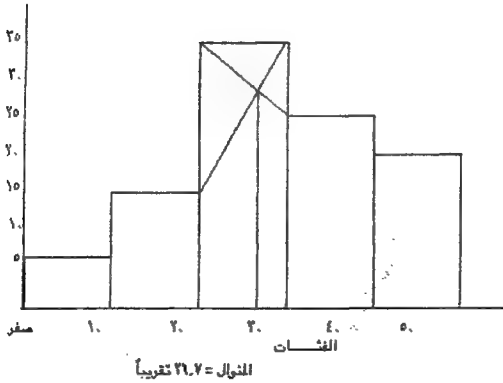
معى قيمة المنوال = د

فإن :

$$\text{المنوال م} = \text{ل} + \text{د} \times \frac{\frac{\text{ك}}{\text{ك} + \text{ك}}}{\frac{\text{ك}}{\text{ك} + \text{ك}}}$$

$$٣٦,٦٧ = ٦,٦٧ + ٢٠ = \frac{٢٠}{١٠ + ٢٠} \times ١٠ + ٢٠ =$$

كما يمكن حساب قيمة المنوال بالرسم البياني كما يلي :



بالإضافة إلى الوسط الحسابي والوسيط والمنوال توجد أوساط أخرى

الوسط الحسابي المرجح بوزان معينة

بفرض أنك تستهلك السلع أ، ب، ج بتكلفة للوحدة قدرها ١٠، ٧، ١٣ جنيه على الترتيب للوحدة فإنك تقول بأن الوسط الحسابي لمتوسط تكلفة الوحدة

$$10 = 3 \div (13 + 7 + 10) =$$

ولكن هذا الرقم قد يكون مضللاً إذا كان هناك اختلاف في الكميات المستهلكة من كل نوع فإذا كان الاستهلاك من الأنواع الثلاثة = ١٥، ٥، ٨٠ على الترتيب فإن المفروض أن يقترب الوسط من رقم ١٣ والذي يمثل المستهلك منه ٨٠٪ من حجم الاستهلاك الكلي ولهذا يمكن ترجيح الأرقام المشاز إليها وهي ١٣، ٧، ١٠ بأرقام الاستهلاك ٨٠، ٥، ١٥ هكذا

$$\text{الوسط الحسابي المرجح} = \frac{\text{مجموع كل قيمة} \times \text{وزنها}}{\text{مجموع الأوزان}}$$

$$12,75 = \frac{13 \times 80}{100} = \frac{(80 \times 13) + (5 \times 7) + (15 \times 10)}{80 + 5 + 15} =$$

ولا شك أن هذه القيمة أكثر تعبيراً عن الوسط من الوسط الحسابي غير المرجح

الوسط الهندسي

الوسط الهندسي لأي مجموعة من القيم =

$\sqrt[n]{\text{لحاصل ضرب هذه القيم}}$ التي عددها n

مثال :- أوجد الوسط الهندسي للكميات : ١٢ ، ٩ ، ٤ ، ٣

الوسط الهندسي = الجذر الرابع لحاصل ضرب هذه القيم

$$3 = \sqrt[4]{3 \times 4 \times 9 \times 12}$$

ويستخدم الوسط الهندسي عادة لحساب متوسط معدل التغير ...

فيما يلي جدول التوزيع التكراري لأجور العاملين في إحدى الشركات شهرياً

المطلوب حساب الوسط الحسابي والوسيط والمنوال والمقارنة بين الأوساط الثلاثة :

فئات الأجور الشهرية بالمجنيهات	التكرار
١٥٠ - ١٠٠	٥٠
٢٠٠ - ١٥٠	١٠٠
٢٥٠ - ٢٠٠	١٥٠
٣٠٠ - ٢٥٠	٢٠٠
٣٥٠ - ٣٠٠	٢٠٠
٤٠٠ - ٣٥٠	١٠٠
٤٥٠ - ٤٠٠	٧٥
٥٠٠ - ٤٥٠	٢٥
	١٠٠٠

الحل : أولاً الوسط الحسابي

١- بالطريقة المطولة :

ف الفئات	ك التكرار	س مراكز الفئات	س × ك
١٥٠ - ١٠٠	٥٠	١٢٥	٦٢٥٠
٢٠٠ - ١٥٠	١٠٠	١٧٥	١٧٥٠٠
٢٥٠ - ٢٠٠	١٥٠	٢٢٥	٣٣٧٥٠
٣٠٠ - ٢٥٠	٢٠٠	٢٧٥	٨٢٥٠٠
٣٥٠ - ٣٠٠	٢٠٠	٣٢٥	٦٥٠٠٠
٤٠٠ - ٣٥٠	١٠٠	٣٧٥	٣٧٥٠٠
٤٥٠ - ٤٠٠	٧٥	٤٢٥	٣١٨٧٥
٥٠٠ - ٤٥٠	٢٥	٤٧٥	١١٨٧٥
	١٠٠٠		٢٨٦٢٥٠

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع س} \times \text{ك}}{\text{مجموع ك}} = \frac{٢٨٦٢٥٠}{١٠٠٠} = ٢٨٦,٢٥٠$$

٢- الحل بالطريقة المختصرة :

ف الفئات	ك التكرار	س مراكز الفئات	ح ح	خ ح	ح ك
١٥٠ - ١٠٠	٥٠	١٢٥	٢٠٠ -	٤ -	٢٠٠ -
٢٠٠ - ١٥٠	١٠٠	١٧٥	١٥٠ -	٣ -	٢٠٠ -
٢٥٠ - ٢٠٠	١٥٠	٢٢٥	١٠٠ -	٢ -	٢٠٠ -
٣٠٠ - ٢٥٠	٢٠٠	٢٧٥	٥٠ -	١ -	٢٠٠ -
٣٥٠ - ٣٠٠	٢٠٠	٣٢٥	صفر	صفر	صفر
٤٠٠ - ٣٥٠	١٠٠	٣٧٥	٥٠	١	١٠٠
٤٥٠ - ٤٠٠	٧٥	٤٢٥	١٠٠	٢	١٥٠
٤٥٠ - ٤٥٠	٢٥	٤٧٥	١٥٠	٣	٧٥
	١٠٠٠				
					١١٠٠ -
					٣٢٥٠ +

					٧٧٥ -

في الحالة السابقة اخترنا وسطا فرضيا مقداره ٣٢٥ وقمنا بحساب انحرافات مراكز الفئات من هذا الوسط الفرضي (ح) ثم اختصرنا هذه الانحرافات بقسمة كل انحراف على رقم ثابت هو ٥٠ (طول الفئة) وحصلنا على ح .

$$\text{مجموع ح ك} = ٣٢٥ + ١١٠٠ - = ٧٧٥ -$$

وحيث أننا قسمنا كل انحراف على ٥٠ نعود فنضرب مجموع الانحرافات $\times ٥٠$

$$\text{مرة أخرى} - ٧٧٥ \times ٥٠ = - ٣٨٧٥٠$$

$$\text{متوسط الانحراف} = - ٣٨٧٥٠ + ١٠٠٠ (\text{مجموع التكرارات}) = - ٣٨٠٧٥٠$$

الوسط الحسابي = الوسط الفرضي ٣٢٥ + (- ٣٨٠٧٥٠) = ٢٨٦,٢٥ وهي نفس النتيجة السابقة .

ثانياً الوسيط :

الفئة الوسيطة

ك التكرار	ف الفئات
٥٠	١٥٠ - ١٠٠
١٠٠	٢٠٠ - ١٥٠
١٥٠	٢٥٠ - ٢٠٠
٢٠٠	٢٥٠ - ٢٠٠
٢٠٠	٢٥٠ - ٢٠٠
١٠٠	٤٠٠ - ٣٥٠
٧٥	٤٥٠ - ٤٠٠
٢٥	٥٠٠ - ٤٥٠
١٠٠٠	

$$\text{الوسيط} = \text{الحـد الأدنى للفئة الوسيطة} + \text{طول الفئة} \times \frac{200}{300}$$

$$232,3 + 250 = \frac{2}{3} \times 50 + 250 =$$

$$282,3 =$$

ملاحظات :

مجموع التكرارات = ١٠٠٠

ترتيب الوسيط = ٢ ÷ ١٠٠٠ = ٥٠٠

مجموع تكرارات الفئات الأولى والثانية والثالثة = ٢٠٠ = ١٥٠ + ١٠٠ + ٥٠

تكرار الفئة الوسيطة = ٢٠٠

لكي نصل الى ترتيب الوسيط نحتاج الى ٢٠٠ مالاضافة الى تكرارات الفئات

السابقة للفئة الوسيطة وهي ٢٠٠، وحيث ان تكرار الفئة الوسيطة = ٢٠٠ نعلم

طول الفئة الوسيطة نفسه ٢٠٠ : ٢٠٠

ثالثاً : المنوال

١ - بالأسلوب الرياضي

قيمة المنوال = الحد الأدنى لعدد المنوال + طول فئة المنوال \times

تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة السابقة
تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة السابقة + تكرار فئة المنوال - تكرار الفئة اللاحقة
 كما سبق الإشارة إليه

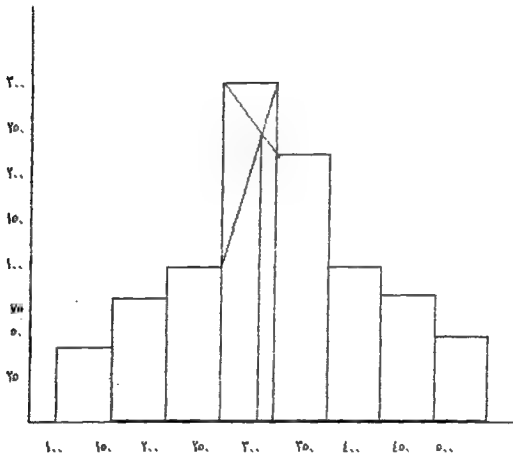
$$م = ل + د \times \frac{ك}{ك + ١ك}$$

$$= ٢٥٠ + ٥٠ \times \frac{١٥٠ - ٣٠٠}{٢٠٠ - ٣٠٠ + ١٥٠ - ٣٠٠}$$

$$= ٢٥٠ + ٥٠ \times \frac{١٥٠}{٢٥٠}$$

$$= ٢٨٠ = ٣٠ + ٢٥٠$$

٢- استخدام الرسم البياني :



المنوال من الرسم حوالى ٢٨.

مقاييس التشتت

Measures of Dispersion

إذا إتخذنا قيم المفردات ٣ ، ٤ ، ٥ لكان متوسط هذه القيم = ٤ وإذا أخذنا قيم المفردات ١ ، ٢ ، ٩ لكان المتوسط = ٤ أيضا ولكن يلاحظ في الحالة الأولى أن قيم المفردات متقاربة مع بعضها البعض ومع الوسط الحسابي لهذه القيم وذلك عكس الحالة الثانية - وعلى ذلك فإن مقاييس التزعة المركزية وحدها لا تكفى لدراسة الظواهر المختلفة - ولهذا فإن مقاييس التشتت هي المقاييس التى تقيس لنا مدى تقارب قيم المفردات المختلفة من قيم الوسط الحسابي وبالتالي من بعضها البعض أو مدى التباعد - فقد يتساوى متوسط نصيب الفرد من الدخل فى الشركة أ مع الشركة ب ولكن قد يوجد تقارب فى دخول الأفراد فى الشركة أ ، وتباعد بين دخول الأفراد فى الشركة ب .

وسنوضح أهم مقاييس التشتت :

(١) المدى RANGE

وهو عبارة عن الفرق بين أكبر وأصغر قيمة من قيم المفردات - فإذا كان أقل أجر فى الشركة = ١٥٠ جنيه شهرياً وأكبر أجر = ١٨٥٠ جنيه شهرياً .
فإن المدى = ١٨٥٠ - ١٥٠ = ١٧٠٠

والمدى لا يستخدم عادة كمقياس من مقاييس التشتت لأنه يتوقف على قيمتين فقط فمثلاً يمكن أن نوضح ذلك بمثالين :

الأرقام ١٠٠ ، ٨٠٠ ، ٩٥٠ ، ١١٠٠ ، ١٢٠٠ ، ١٤٠٠ ، ١٥٠٠

المدى = ١٥٠٠ - ١٠٠ = ١٤٠٠

وكذلك ١٠٠ ، ١٠٢ ، ١٠٥ ، ١١٠ ، ١٢٠ ، ١٥٠ ، ١٥٠٠

المدى = ١٥٠٠ - ١٠٠ = ١٤٠٠

وكذلك الأرقام ١٠٠ ، ١٣١٠ ، ١٤٥٠ ، ١٤٨٠ ، ١٤٩٠ ، ١٤٩٥ ، ١٥٠٠

المدى = ١٥٠٠ - ١٠٠ = ١٤٠٠

من الواضح أن المدى لا يقيس لنا حقيقة التقارب أو التباعد لقيم المفردات عن وسطها الحسابي .

فهو يهتم بالفرق بين قيمتين فقط من قيم المفردات دون الاهتمام بالقيم الأخرى للمفردات .

(٢) المدى بين تشقتين Interfractile range

حتى يمكن فهم هذا الموضوع نفرض أننا بصدد دراسة الدخل الأسبوعي لبعض العمال وعددهم ١٢ عاملاً وكانت النتائج كما يلي :

١٢ ، ٤ ، ٥ ، ٣ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٧ ، ٩ ، ٤ ، ٥ ، ٨

الوسط الحسابي لهذه القيم = مجموع المفردات مقسومة على ١٢ = ٦٠

والمدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة = ١٢ - ٢ = ١٠ جنيه

ويمكن ترتيب قيم المفردات تصاعدياً أو تنازلياً

الترتيب التصاعدي = ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٤ ، ٥ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٧ ، ٨ ، ٨ ، ٩ ، ١٢

١٢.

والوسيط مثلاً هو القيمة الوسطى أى قيمة المفردة التى يكون عدد المفردات التى تزيد عنها فى القيمة = عدد المفردات التى تقل عنها فى القيمة .

وحيث أن عدد المفردات = ١٢ وهو عدد زوجى فنأخذ متوسط القيمين رقم ٦ ، ٧

$$= (٥ + ٦) \div ٢ = ٥٥ \text{ جنيه}$$

ويمكن أن نختار النسبة ٢٥ ٪ بدلاً من ٥٠ ٪ فنختار نقطة مثلاً بحيث تكون عدد المفردات التى تقل عنها فى القيمة = ٢٥ ٪ من عدد المفردات وكذلك يمكن أن نختار هذه القيمة التى يقع ترتيبها تصاعدياً عند ثلث القيم والقيمة التى تقع ترتيبها تصاعدياً عند ثلثى القيم .

ونوجد المدى بين القيمة التى تقع عند ثلث عدد المفردات والقيمة التى تقع تصاعدياً عند ثلثى عدد المفردات .

فى المثال السابق عن أجور العمال الأسبوعية

نجد أن عدد المفردات = ١٢

ثلث عدد المفردات = ٤ ، وقيمة المفردة رقم ٤ = ٤

وقيمة المفردة التى يقع ترتيبها تصاعدياً عند ثلثى عدد المفردات

وهى المفردة رقم ٨ (١٢ × ثلثين) = ٧

فإذا أردنا الآن الحصول على المدى بين قيمة المفردة التى تقع فى الثلث الأول تصاعدياً وقيمة المفردة التى تقع عند الثلث الثانى تصاعدياً

فإن قيمة المدى = ٧ - ٤ = ٣

كما يتضح من الجدول التالي :

الثالث الأول	الثالث الثاني	الثالث الثالث
٢.	٥.	٧.
٣.	٥.	٨.
٤.	٦.	٩.
٤.	٧.	١٢.
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

الإنحراف الربيعي = نصف المدى الربيعي

$$\frac{(١٤ - ٢٤)}{2}$$

(٢) الإنحراف الربيعي QUARTIE DEVIATION

قيمة المفردة التي ترتبها هذه الربع الثالث - قيمة المفردة التي ترتبها هذه الربع الأول

٢

$$\frac{Q3 - Q1}{2} \quad \frac{١٤ - ٢٤}{2}$$

في المثال السابق :

الربع الأول	الربع الثاني	الربع الثالث	الربع الرابع
٢.	٤.	٦.	٨.
٣.	٥.	٧.	٩.
٤.	الربع الأول ٥.	٧. - الربع الثالث ١٢.	

$$٤. = ٢٤ , ٧. = ١٤$$

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{٤. - ٧.}{2} = \frac{١٥}{2}$$

٤- متوسط انحراف القيم عن الوسط الحسابي مع إهمال الإشارات

في المثال السابق نجد أن قيم المفردات هي :

$$٢. , ٣. , ٤. , ٤. , ٥. , ٥. , ٦. , ٧. , ٧. , ٨. , ٩. , ١٢.$$

والوسط الحسابي = ٦.

ولو أننا حسبنا متوسط الإنحراف عن الوسط الحسابي أخذ الإشارات في

الاعتبار لكان متوسط الانحرافات = صفر ولهذا تهمل الإشارات ويكون

$$\frac{\text{الانحراف المتوسط} = \text{مجم} | \text{س} - \text{س}^* |}{\text{ن}}$$

حيث س^* الوسط الحسابي ، س قيمة كل مفردة ، ن عدد المفردات .

$$٤. + ٢. + ٢. + ١. + ١. + \text{صفر} + ١. + ١. + ٢. + ٢. + ٢. + ٦.$$

$$١٢$$

$$٢١,٦٧ = \frac{٢٦٠}{١٢}$$

٥- التباين Variation

والانحراف المعياري Standard deviation

بدلاً من إهمال الاشارات فإننا منقوم بتربيع القيم والحصول على متوسط مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها الحسابى .

وهو ما نسميه بالتباين والانحراف المعياري هو الجذر التربيعى للتباين كما يتضح من المثال الآتى :

قيم المفردات	ح	ح ٢
٢.	٤.-	١٦..
٣.	٣.-	٩..
٤.	٢.-	٤..
٤.	٢.-	٤..
٥.	١.-	١..
٥.	١.-	١..
٦.	صفر	صفر
٧.	١.	١..
٧.	١.	١..
٨.	٢.	٤..
٩.	٣.	٩..
١٢.	٦.	٣٦..
		<hr/>
		٨٦..

٨٦..

التباين = $\frac{٧١٦,٦٧}{١٢}$

١٢

الانحراف المعياري = $\sqrt{٧١٦,٦٧}$ = ٢٦,٧٧والتباين يرمز له بالرمز σ^2

والانحراف المعياري س

$$س = \sqrt{\frac{\sum (مجم(س-س'))^2}{ن}} = \sqrt{\frac{\sum (س-س')^2}{ن}}$$

إيجاد التباين والانحراف المعياري للبيانات المبوبة
توزيع درجات ١٠٠ طالب في مادة الإحصاء

فئات الدرجات	عدد الطلاب	مراكز الفئات	ك.س	س-س'	ك(س-س')	ك(س-س') ^٢
صفر : اقل من ٢٠	١٠	١٠	١٠٠	٣٥-	١٢٢٥	١٢٢٥٠
٢٠ - ٤٠	٢٥	٣٠	٧٥٠	١٥-	٢٢٥	٥٦٢٥
٤٠ - ٦٠	٥٠	٥٠	٢٥٠٠	٥	٢٥	١٢٥٠
٦٠ - ٨٠	١٠	٧٠	٧٠٠	٢٥	٦٢٥	٦٢٥٠
٨٠ - ١٠٠	٥	٩٠	٤٥٠	٤٥	٢٠٢٥	١٠١٢٥
	١٠٠		٤٥٠٠		٢٥٠٠	٢٥٠٠٠

٤٥٠٠

$$س' = \frac{٤٥٠٠}{١٠٠} = ٤٥$$

١٠٠

٢٥٠٠

$$التباين = \frac{٢٥٠٠}{١٠٠} = ٢٥$$

١٠٠

$$١٨,٨٤ = \sqrt{\frac{١٠٠}{٢٥٠٠}}$$

۲۷	۷	
۲۲۰	۱۰ -	۱.
۱۰۰	۱۰ -	۱۰
صفر	صفر -	۲۰
۲۰	۰ -	۲.
۲۰	۰	۳.
۲۰	۰ -	۲.
۲۰	۰ -	۲.
۱۲۲۰	۲۰	۶.
<hr/>		<hr/>
۱۶۰.		۲۰۰

۱۶۰.

$$۲.۶, ۲۰ = \frac{\quad}{\lambda} = ۲.۷$$

$$۱۴, ۳۶ = \sqrt{۲.۶, ۲۰} = ۷$$

ملخص لأهم القوانين

١- المدى = قيمة أعلى مفردة - قيمة أصغر مفردة

٢- المدى الربيعي = $ع٢ - ع١$

قيمة الربع الثالث - قيمة الربع الأول

٣- الانحراف الربيعي = نصف المدى الربيعي

$$= \frac{(ع٢ - ع١)}{٢}$$

$$٤- متوسط الانحراف = \frac{س - س'}{ن}$$

مع إهمال الإشارات

$$٥- التباين = س٢ = \frac{س(س - س')}{ن}$$

$$٦- الانحراف المعياري = \sqrt{\text{التباين}}$$

$$= \sqrt{\frac{س(س - س')}{ن}}$$

الفصل الثانى

نظرية الاحتمالات

الفصل الأول

مقدمة

Sets and subjects

المجموعات والمجموعات الفرعية [الثنائيات والنثائيات الجزئية]

ليس من الصعب علينا أن نتبين أن الطالب بكلية التجارة جامعة القاهرة ينتمى إلى مجموعة طلاب كلية التجارة وكلية التجارة نفسها تنتمى إلى مجموعة كليات جامعة القاهرة وجامعة القاهرة تنتمى إلى مجموعة جامعات جمهورية مصر العربية.

وفي العلوم الرياضية نهتم في كثير من الأحوال بالمجموعات أى مجموعة من الأشياء وبعض هذه المجموعات قد تكون صغيرة كمجموعة من الأفراد الذين يكونون إدارة صغيرة وقد تكون هذه المجموعة كبيرة كالو قلتنا مثلا مجموعة الأسماك الموجودة في إحدى البحيرات

ونستخدم كلمة مجموعة في الرياضيات Set كدلالة على جمع من الأشياء - والأشياء الموجودة بالمجموعة ستطلق عليها عناصر أو أعضاء المجموعة .

ف عندما نتكلم عن مجموعة طلبة كلية التجارة فإن كل طالب بالكلية يعتبر عنصرا من عناصر المجموعة .

ويمكن أن نعبّر عن المجموعة بالطريقة التالية $1 = (\text{طلبة كلية التجارة جامعة القاهرة})$.

$$1 = (١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠)$$

ومعنى هذا أن ١ هي المجموعة التي عناصرها الأعداد الفردية ١، ٣، ٥، ٧، ٩ .
والنقط هنا تنمى الاستمرار .

ومن الممكن إستخدام عبارة لوصف عناصر المجموعة فنقول مثلا .

$B =$ (كليات جامعة القاهرة) بدلا من ذكر أسماء الكليات .

فالعبارة هنا تصف للعامل المشترك لجميع أفراد المجموعة

وفي الأمثلة السابقة يمكن أن نقول بأن

رقم ٣ هو عنصر من عناصر المجموعة ١

ويمكن أن نعبر عن ذلك باستخدام الحرف اليوناني ϵ فنقول .

$$3 \in A$$

و ϵ هنا معناها عنصر من عناصر أى اختصار لهذه العبارة كما نقول ٣ \in ١

كأن ٣ ليست عنصرا من عناصر ١

وكذلك يمكن أن نقول بأن مكان محافظة الشرقية يكونون بمجموعة مكان

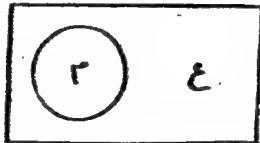
محافظة القاهرة يكونون بمجموعة وسكان محافظة الإسكندرية يكونون بمجموعة وكل

هذه المجموعات عبارة عن مجموعات فرعية من المجموعة التى تمثل جميع - كل مصر .

وكلمة Set بمعنى مجموعة يمكن أن نطلق عليها Space وكلمة Subset

بمعنى مجموعة فرعية Subspace وكل مصر فرع عربى وهذه حقيقة فلو أننا

ظهرت بمسقط والمصريين بدائرة فيمكن أن نعبر عن هذه الحقيقة منسيا كما على



التعاريف الأساسية

١ - تكون المجموعة Set من عدة عناصر تربطها ببعضها البعض صفة أو خاصية معينة هي التي تحدد تعريف المجموعة .

٢ - لكي نحدد انتهاء عنصر معين إلى مجموعة معينة فإتانا نستخدم الحرف اليوناني ϵ فنقول مثلا أن م ϵ أ أو أن م هو عنصر من عناصر المجموعة أ وإذا شطبنا ϵ فإن هذا يعني عدم انتهاء العنصر للمجموعة .

فنقول م \notin أ أي م ليست عنصرا من عناصر المجموعة أ

٣ - إذا كانت المجموعة خالية من العناصر فإتانا نطلق عليها المجموعة الصفرية أو المجموعة الفارغة ويمكن أن نبرعنا بالرمز الأسكندنافي \emptyset كما يمكن أن نبرع من عدم إحتراف المجموعة لعناصر بكتابة قوسين فارغين [] أو بالحرف اليوناني ϕ . . .

ومن الأمثلة على المجموعة الصفرية مثلا مجموعة الرجال الذين عاشوا لمدة تزيد عن ٥٠٠ سنة .

أر مجموعة الحلول الحقيقية للمعادلة $x^2 = 1$ -

كما يجب أن نفرق بين [] ونعني المجموعة الصفرية أو الخالية وبين [صفر] لأن هذه الأخيرة تعني أن لها عنصرا واحدا وهو الصفر .

٤ - المجموعة تقرعية :

إذا كان لدينا فصلا دراسيا به مجموعة من الدارسين من الذكور والإناث فإننا يمكننا أن نقول مجموعة الدارسين كما يمكن أن نتحدث عن مجموعة الدارسين

من المذكور وفي هذه الحالة الأخيرة نجد أن كل دارس ذكر هو عنصر من عناصر مجموعة الدارسين من الذكور وهو أيضا عنصر من مجموعة الدارسين (إلى تشير الذكور والآنث) فإذا أطلقنا على مجموعة الدارسين المجموعة A وعلى مجموعة الدارسين من الذكور المجموعة B وعلى مجموعة الدارسين من الإناث المجموعة C فإنه يمكن القول بأن المجموعة B هي مجموعة فرعية من المجموعة A والمجموعة C هي مجموعة فرعية من المجموعة A .

لأن كل عنصر من عناصر المجموعة B هو في نفس الوقت عنصر من عناصر المجموعة A وكذلك كل عنصر من عناصر المجموعة C هو في نفس الوقت عنصر من عناصر المجموعة A .

وعلى ذلك يمكن أن نعرف المجموعة الفرعية على الوجه الآتي :

مجموعة B تعتبر مجموعة فرعية للمجموعة A إذا كانت جميع عناصر المجموعة B هي في نفس الوقت من عناصر المجموعة A أو بعبارة أخرى إذا كانت المجموعة A تحتوي على جميع العناصر الخاصة بالمجموعة B .

$$\text{مثال : } A = \{ \text{ل م ن هـ و} \}$$

$$B = \{ \text{م هـ و} \}$$

ففي هذه الحالة تعتبر المجموعة B مجموعة فرعية للمجموعة A ولكن ندر عن المجموعة B بأنها مجموعة فرعية من المجموعة A نقول $B \subseteq A$.

ومعنى هذا أن الرمز \subseteq = مجموعة فرعية من

ولكن هذه الحالة تعتبر المجموعة B مجموعة فرعية حقيقية للمجموعة A فإنه من المفروض أن تحتوي المجموعة A على عناصر أخرى بخلاف العناصر الموجودة حتى ولو كان حمرا واحداً وفي هذه الحالة نستخدم الرمز \subset .

• - تعادل المجموعات :

تساوى المجموعة A المجموعة B إذا كان لكل من المجموعتين نفس العناصر عددا ونوعا .

وفي هذه الحالة نقول $A = B$

وفي حالة عدم التساوى نقول $A \neq B$

أى لا تساوى B

ويعنى التساوى هو أن كل عنصر من عناصر A يساوى تماما عنصرا من عناصر B ولا يهتما الترتيب في هذه الحالة

مثلا المجموعة $A = \{ ٢ , ٧ , ٩ \}$

$B = \{ ٧ , ٩ , ٢ \}$

في هذه الحالة $A = B$

والتساوى يختلف عن التعادل في عدد العناصر فإذا كان لدينا المجموعة A والمجموعة B

وكان $A = \{ س , ص , ع , ل \}$

$B = \{ ص , ع , س , ل \}$

فإن $A = B$ لأن كلاهما تحتوى على نفس العناصر نوعا وكما ومعنى هذا أن A و B هما أحمان لنفس المجموعة ولا يهم الترتيب في هذه الحالة لأن

$\{ س , ص , ع \} = \{ ص , س , ع \} = \{ ع , س , ص \}$

وكذلك إذا كانت

$M = \{ س , ص , ل \}$

$N = \{ ع , ل , هـ \}$

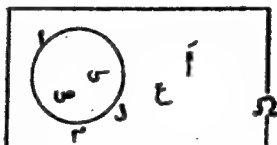
فإن $M \neq N$ أى لا تساوى N

٦ - المجموعة التامة Complement

إذا فرضنا أن لدينا المجموعة Ω \mathcal{S}
 فإن المجموعة المكملّة للمجموعة \mathcal{A} ويرمز لها بالرمز \mathcal{A}^c هي المجموعة التي
 تحتوي على جميع العناصر التي لا توجد بالمجموعة \mathcal{A} ولكنها توجد بالمجموعة Ω

من الرسم يضح أن

$$[\mathcal{A}^c] = \Omega - [\mathcal{A}]$$



ويمكن تلخيص بعض الخصائص السابقة في شكل فين Venn Diagrams

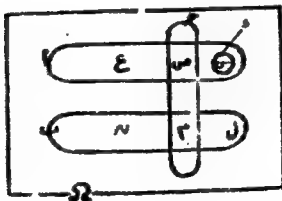
$$[\mathcal{A}^c] = \Omega - [\mathcal{A}]$$

$$[\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^c] = \Omega$$

$$[\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c] = \emptyset$$

$$[\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c] = \emptyset$$

$$[\mathcal{A} \cap \mathcal{A}^c] = \emptyset$$



الشكل السابق يوضح المجموعة الأساسية Ω والمجموعات الفرعية \mathcal{A}
 ونلاحظ أن المتغير \mathcal{A} مشترك بين المجموعتين الفرعيتين \mathcal{A} ، \mathcal{B} وكذلك

للعنصر مشترك بين المجموعتين الفرعيتين ب ، ج وكذلك العنصر مشترك
بين المجموعتين الفرعيتين ا ، د

نقول من ا وكذلك من د
وكذلك نلاحظ أن د أي أن المجموعة د مجموعة فرعية حقيقية
للمجموعة ا

وكذلك $a = [d, m, n]$ أي المجموعة المتحدة للمجموعة ا بالنسبة
للمجموعة د

والمجموعة الأساسية د والتي تحتوي على كل المجموعات كما هو موضح
بالشكل السابق تسمى المجموعة الأساسية أو المجموعة الشاملة Universal
Set or Background Set

تقاطع المجموعات

The Intersection of Sets

نفرض أن المجموعة ا تمثل طلبة السنة الأولى بكلية التجارة وأن المجموعة ب
تمثل أعضاء جمعية المحاسبة وإذا فرضنا أن هناك عدداً من طلبة السنة الأولى في
كلية التجارة هم في نفس الوقت أعضاء في جمعية المحاسبة فإنه من الممكن أن تمثل
ذلك كما يلي :



الجزء المظلل = $a \cap b$

- وعلى ذلك فإن المجموعة \mathcal{C} = [طلبة السنة الأولى الأعضاء في جمعية الخاسنة]
وعلى ذلك فإن تقاطع المجموعتين \mathcal{A} و \mathcal{B} ويمرر عنه بالرمز $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ هي
المجموعة التي تشمل كل العناصر التي تعتبر عناصر للمجموعتين \mathcal{A} و \mathcal{B} في الوقت
نفسه التي تشمل العناصر المشتركة .

مثال :

$$\begin{aligned} [٥ , ٢ , ٣ , ٤ , ١] &= \mathcal{A} \\ [٨ , ٦ , ٤ , ١ , ٢] &= \mathcal{B} \\ [١٤ , ١٢ , ١٠ , ٨] &= \mathcal{C} \end{aligned}$$

في هذه الحالة نجد أن :

$$\begin{aligned} [٤ , ٢] &= \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \\ [] &= \mathcal{A} \cap \mathcal{C} \\ [٨] &= \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \\ [٥ , ٤ , ٣ , ٢ , ١] &= \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \end{aligned}$$

اتحاد مجموعتين Union

المجموعة التي تمرر عن اتحاد مجموعتين هي المجموعة التي تشمل جميع العناصر
الوجودية في كل من المجموعتين بدون تكرار فمثلا لو كان لدينا

$$\begin{aligned} \text{المجموعة } \mathcal{A} &= [٥ , ٤ , ٣ , ٢ , ١] \\ \text{المجموعة } \mathcal{B} &= [٨ , ٦ , ٤ , ٢] \\ \text{فإن المجموعة } \mathcal{C} &= [٨ , ٦ , ٥ , ٤ , ٣ , ٢ , ١] \end{aligned}$$

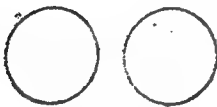
هي المجموعة المتحدة وتمرر ذلك بقولنا

$$\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \mathcal{C}$$

وبلاحظ أن المجموعة \mathcal{C} بها كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة \mathcal{A} أو المجموعة

ب. كما أنه من الممكن أن يكون أحد العناصر موجودا بالمجموعتين ١ ، ٢ كـ ١
هو الحال بالنسبة للرقين ٢ ، ٣ ولكننا لم نكررها .

كما يجب أن نلاحظ أنه من الممكن أن تقاطع المجموعتان أو لا تقاطع (عندما
لا توجد أى عناصر مشتركة بينهما)



مجموعتان منفصلتان
Disjoint



مجموعتان متقاطعتان
Conjoint

قانون التبديل

Commutative Law

قانون المشاركة أو الاقتران Associative Law

• عندما نقول $A \cup B$ فلا يوجد أى فارق بين أن نقول $B \cup A$ أو $A \cup B$ لأن النتيجة واحدة وهى المجموعة التى تتضمن اتحاد A و B ،

وعندما يمكن إجراء هذا التبديل دون أن تتأثر النتيجة فإنه من الممكن القول بأن الأمر هنا إنما يخضع لقانون التبديل Commutative Law

وكذلك الحال بالنسبة للتقاطع فن الممكن القول أن $A \cap B = B \cap A$ وفى هذه الحالة يخضع التقاطع أيضا لقانون التبديل

والأمر لا يختلف عند وجود ٢ مجموعتين

$$A \cup B = B \cup A$$

$$\text{فلا } A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C \quad \text{ولذا لا داعى للاقتران}$$

$$= A \cup (B \cup C)$$

مثال

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4) &= A \\ (2, 3, 4, 5) &= B \\ (3, 4, 5, 6) &= C \end{aligned}$$

ربما ذلك :

$$\begin{aligned} (1, 2, 3, 4) \cup (2, 3, 4, 5) &= (A \cup B) \cup C \\ (1, 2, 3, 4, 5) &= \end{aligned}$$

وكذلك

$$\begin{aligned} (٦٠٥٠٤٠٢٠٢٠١) \cup \cup &= (١ \cup \cup) \cup \\ (٦٠٥٠٤٠٢٠٢٠١) &= \end{aligned}$$

أي أن $\cup \cup (١ \cup \cup) = \cup \cup (١ \cup \cup)$ ولهذا يمكن القول
بأنه نظراً لأن

$$\cup \cup (١ \cup \cup) = \cup \cup (١ \cup \cup)$$

فإن الأمر يخضع لقانون الإقتران Associative Law

كما يمكن إثبات أن

$$\cap \cap (١ \cap \cap) = (١ \cap \cap) \cap$$

لأن الطرفين الأيمن

$$(٤٠٣) = (٥٠٤٠٣) \cap (٤٠٣٠٦٠١)$$

والطرف الأيسر

$$(٤٠٣) = (٦٠٥٠٤٠٢٠١) \cap (٤٠٣٠٢)$$

الملاحظة :

$$\left. \begin{array}{l} \text{قانون التبديل} \end{array} \right\} \begin{array}{l} ١ \cup \cup = \cup \cup ١ \\ ١ \cap \cap = \cap \cap ١ \end{array}$$

وكذلك

$$\left. \begin{array}{l} \text{قانون الإقتران} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \cup \cup (١ \cup \cup) = (١ \cup \cup) \cup \cup \\ \cap \cap (١ \cap \cap) = (١ \cap \cap) \cap \cap \end{array}$$

عدد العناصر بالمجموعة ...

$$ع(١) = \text{عدد العناصر بالمجموعة ١}$$

مثال

$$١١, ١٠, ٩, ٨) = ١$$

$$(١١, ١٠, ٩, ٨) = ٢$$

$$٤ = ع(١) \dots$$

$$٢ = ع(٢)$$

الجملة الرياضية

Mathematical Sentences

إذا كان الشخص s هو مصرى الجنبية فيمكن أن نقول

$$1 = [s / s \text{ مصرى}]$$

أى أن ١ تتكون من العناصر s حيث s هو شخص مصرى
وتسمى هذه الجملة بالجملة المفتوحة - والجملة المفتوحة هي جملة رياضية توضع لها
تعريفاً لمجموعة وتحدد لنا العناصر الموجودة في الكون والتي تدخل ضمن هذه المجموعة

بمجموعة الحلول لجملة مفتوحة :

هي قائمة بالعناصر التي تحدد الجملة المفتوحة أى التي ينطبق عليها التعريف
الوارد في الجملة المفتوحة

المتغير : s في المثال السابق تسمى متغير لأنها يمكن أن تأخذ العديد من
أسماء المصريين أى أن كل مصرى يمكن أن يدخل دون قيد أو شرط ولكن
في بعض الأحيان قد نرغب في تحديد الأشياء التي تدخل في أعداد المتغيرات وذلك
بوضع قيد معين يحدد لنا مجال أو نطاق المتغير

مثال هدى

نفرض أن s هو متغير نطاقه المجموعة الأساسية

$$0 = [s / s = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

وال المطلوب تحديد عناصر المجموعة $[s / s \text{ عدد موجب}]$

$$\text{الحل } s = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]$$

الفصل الثاني

مبادئ الاحتمالات

مقدمة وتعريف

١ - تعتبر نظرية الاحتمالات من الفروع الهامة للرياضيات وقد اتسع نطاق تطبيقها حتى أصبح يشمل كافة العلوم الطبيعية والتقنية والاجتماعية كما أن صناعة التأمين تقوم أساساً على نظرية الاحتمالات .

وقد كانت ألعاب الميسر المختلفة دافعاً أساسياً لظهور هذه النظرية بل إن هذه النظرية بدأت ببعض الدراسات التي قام بها الهواة والمخترون على ألعاب الحظ منذ ثلاثة قرون .

وبهذا في هذا المقام إيضاح بعض المبادئ الأساسية للاحتمالات ونمياً مع التطور التاريخي لهذه النظرية سنبدأ بعرض بعض الأمثلة التي ترتبط بما يسمى « ألعاب الحظ » .

ففي لعبة الروليت « Roulette » مثلاً يوجد ٣٧ رقماً وفي كل دور من لدوار اللعب يدور القرص ومعه كرة صغيرة بسرعة ثم تنزل سرعته تدريجياً إلى أن تستقر الكرة الموجودة على القرص عند أحد هذه الأرقام (من رقم الصفر إلى رقم ٣٦) وبفرض عدم وجود أى نوع من أنواع التحكم في دوران القرص نجد أنه من الممكن أن تستقر الكرة عند أى رقم من الأرقام في كل دور من الأدوار أو مباراة أخرى تتكافئ جميع الأرقام في فرص استقرار الكرة أمامها .

معنى هذا أنه عند إجراء تجربة معينة أو عملية معينة فإن هناك عدة نتائج يمكن أن تسفر عنها هذه التجربة أو العملية .

وفي مثل هذه الأحوال يجب أن نلاحظ أن الحدث الأول يمكن أن يتحقق إذا أسفرت التجربة عن الحصول على رقم فردى أى إذا حصلنا على أحد عناصر المجموعة α كما أن الحدث الثانى يتحقق إذا حصلنا على أحد عناصر المجموعة الفرعية β

ولذلك يمكننا تعريف الحدث بأنه مجموعة فرعية من مجموعة النتائج Ω

٤ — تعريف الإحتمال

إذا فرضنا أن مجموعة النتائج لتجربة معينة تتكون من عدد من النتائج مقدار .

بحيث أن

$$\Omega = \{ \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n \}$$

وإذا عرفنا كل مجموعة فرعية من مجموعة النتائج تتكون من عنصر واحد (أى نتيجة واحدة من النتائج) بالحدث البسيط ، فإن هذا يعنى أن هناك n من الأحداث البسيطة أو n من المجموعات الفرعية لمجموعة النتائج وأن كل مجموعة من هذه المجموعات الفرعية تشمل عنصراً واحداً .

وفي هذه الحالة يمكن تعريف الإحتمال بأنه الرقم الذى يمكن تخصيصه أو إعطائه لكل حدث بسيط والذى يطلق عليه إحتمال الحدث وبحيث يكون مجموع الإحتمالات لكل الحوادث البسيطة = واحد صحيح .

ويمكن أن نرمز لإحتمال الحادث البسيط بالرمز $P(\omega_i)$

وعلى ذلك فإن

$$P(\omega_1) + P(\omega_2) + \dots + P(\omega_n) = 1$$

كما يجدر الإشارة إلى أن الحوادث البسيطة تتمتع كلها بفرص متكافئة .

وإذا أردنا مثلاً الحصول على احتمال حدوث الحادث α والذى نرمز له بالرمز

ع (١) حيث ١ عبارة عن مجموعة فرعية من مجموعة النتائج ، فإن هذا الاحتمال = مجموع احتمالات الحوادث البسيطة التي تتكون منها المجموعة الفرعية ١

مثال :

ع (١)

حيث ١ = [صر صر . صر صر : صر صر]

$$ع (١) = ع (صر صر) + ع (صر صر) + ع (صر صر)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

ونفس ذلك هو أنه عند إلغاء قطعتين من التقود فإن هناك ٤ حالات وهي :-

ان تحصل على	صورة	صورة
أو	رقم	رقم
أو	رقم	وصورة
أو	صورة	ورقم

وعلى ذلك تتكون مجموعة النتائج من أربعة عناصر أى يوجد أربعة حوادث

بسيطة واحتمال كل حادث بسيط منها $= \frac{1}{4}$ والحدث ١ (الحصول على صورة

ورقم أو رقم وصورة أو رقمين)

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} =$$

واحتمال المجموعة الحالية ع [] = صفر

ويمكن تلخيص ما سبق فيما يلي :-

٥ - يمكن تعريف الحادث ١ بأنه فئة جزئية من فئة النتائج الشاملة

ويمكن أن يتحقق الحادث إذا كانت نتيجة التجربة عنصراً من عناصر هذه الفئة الجزئية .

— إذا كانت مجموعة النتائج Ω تخترق على عدد من الفئات الجزئية التي تتكون كل منها من عنصر واحد — أى أن كل فئة تحتوي على نتيجة واحدة من النتائج التي يمكن أن تسفر عنها التجربة — فإن الفئة الجزئية التي تخترق على نتيجة واحدة تسمى الحادث البسيط .

— يمكن تعريف الاحتمال بأنه رقم موجب يمكن تخصيصه لكل حادث بسيط . فئة النتائج ، وبموجب احتمال الحادث البسيط بحيث أن مجموع الاحتمالات لكل هذه الحوادث البسيطة = 1

— الاحتمال يمكن أن يكون رقماً أكبر من الصفر وأصغر من الواحد الصحيح

مثال (١) :

كيس به ١٠ كرات حمراء ، ٥ كرات بيضاء في هذه الحالة نعتبر أن مجموعته الشاملة Ω هي مجموعة الكرات كلها الموجودة بالكيس وعدد عناصرها = 1٥

$$\text{أى أن } \Omega = (١٥)$$

ونعتبر أن مجموعة الكرات الحمراء A مثلاً هي مجموعة فرعية من المجموعة الأساسية وعدد عناصرها = ١٠ = (1)

ففي هذه الحالة عدد أن

$$\frac{2}{3} = \frac{10}{15} = \frac{(1) \Omega}{(\Omega) \Omega} = (1) \Omega$$

أى أن احتمال سحب كرة حمراء من هذا الكيس = $\frac{2}{3}$

وعبراً يمكن القول بأنه إذا كانت هناك فئة شاملة Ω — وكل عنصر

من عناصرها يعتبر حادثا بسيطا وأن هذه الأحداث البسيطة متشابهة ولها
فرص متكافئة الحدوث . وكان لهذه القعة الشاملة فئة فرعية مكونة من مجموعتين
من الأحداث البسيطة التي نجعلها صفة مشتركة فإن

$$\frac{(1) \mathcal{E}}{(5) \mathcal{E}} = (1) \mathcal{E}$$

مثال (٢) :

تجر فيه ٥٥ سيارة لبيع من بينها ١٠ سيارات بيضاء . فإذا سرفت سيارة
واحدة فما احتمال أن تكون السيارة المرسومة بيضاء

في هذه الحالة المجموعة الأساسية \mathcal{E} تشمل جميع السيارات

$$55 = (5) \mathcal{E}$$

مجموعة السيارات البيضاء = $(1) \mathcal{E}$

$$10 = (1) \mathcal{E}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{10}{55} = \frac{(1) \mathcal{E}}{(5) \mathcal{E}} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

مثال (٣) :

في لعبة الروليت . ما احتمال أن يفوز شخصا يلعب على الأرقام الفردية

الحل

مجموعة الأرقام الفردية (١) ٣٦

$$18 = (1) \mathcal{E}$$

$$36 = (5) \mathcal{E} = \text{المجموعة الشاملة للأرقام كلها}$$

$$\frac{18}{37} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

ينضح بما سبق أن كل هذه الاحتمالات يمكن قياسها بطريقة حساية لهذا يتفق عليها الاحتمالات الحساية أو الرياضية .

"Mathematical Probabilities"

وهي الاحتمالات التي يمكن قياسها دون حاجة لإجراء تجارب معينة .

ولكن لا يوجد ما يمنع من إجراء التجارب وذلك للمقارنة بين الاحتمال الرياضي وبين القيم الفعلية التي يمكن الحصول عليها وجدير بالذكر أنه ليس من المؤكد خصوصاً إذا صغر عدد التجارب أن يحدث التوافق بين الاحتمال النظري والقيم الفعلية التي نحصل عليها ، ولكن عند إجراء عدد كبير جداً من التجارب فإن الاحتمال النظري يميل إلى التعادل مع القيم المحققة كما أنه من الممكن إيجاد علاقة بين الاحتمالات الرياضية وبين النتائج الإحصائية التي نحصل عليها نتيجة التجارب العملية ، وهذه العلاقة يحكمها قانون الأعداد الكبيرة .

ولقد حاول الكثير من الكتابين هذا الموضوع انتقاد الاحتمالات الحساية ومنهم ستيفارت ميل وفين وكريستال وليس المجال هنا للدخول في تفاصيل هذا الموضوع ولكن نكتفي بالإشارة إلى أنه لتحقيق الاحتمال الرياضي لا بد من إجراء عدد كبير جداً من التجارب وأما لو قل عدد التجارب فإنه من الممكن أن يحدث خلاف كبير من الاحتمال الرياضي والقيم المحققة ، فثلا لو ألقينا بزهرة من زمهرات الفرد على سطح أملس ١٢ مرة فإنه لا يمكن الحصول على كل رقم من الأرقام الستة مرتين ولو حدث هذا لكان بمحض الصدفة ولكننا لو أجرنا هذه التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات فإنه من الممكن أن يتبادل عدد مرات الحصول على كل رقم من الأرقام الستة .

ولهذا يعرف البعض الاحتمال بأنه التكرار النسبي لحدوث حدث معين عندما تجرى التجربة عدداً كبيراً جداً من المرات .

الإحصائية ومن الفروق الأساسية بين الاحتمالات الرياضية والاحتمالات الإحصائية أن احتمالات الأخيرة عرضة للتغير من وقت لآخر كما أنها قد تختلف من مكان لآخر فمثلاً احتمالات الرقاة والحياة السابق الإشارة إليها تختلف من مجتمع لآخر كما أنها قد تتغير في المجتمع الواحد من وقت لآخر وذلك على العكس من الاحتمالات الرياضية فهي لا تتغير إطلاقاً .

فمثلاً إذا ألقينا بمعمه متماثلة لها وجه به صورة ووجه به رقم . فاحتمال ظهور الصورة $= \frac{1}{2}$ واحتمال ظهور الرقم $= \frac{1}{2}$ وسواء كنا في بلد أو آخر فإن الاحتمال الرياضي لا يتغير . كذلك في أي وقت من الأوقات في البلد الواحد . يعبر الاحتمال الرياضي هنا $= \frac{1}{2}$

كما يجب أن نشير إلى أن الاحتمالات الرياضية يمكن إيجادها بالطرق الحسابية السابق الإشارة إليها بالنسبة لعدد محدود من الحوادث ولكن لا يمكن إيجادها بالنسبة لباقي الظواهر . وعمرةً نستخدم الاحتمالات الإحصائية بقياس احتمالات الظواهر المختلفة على ضوء القيام بعدد كبير من التجارب لتسجيل نتائجها

فلنألو ألقينا بقطعة من النقود ١٠٠٠ مرة وحصلنا على الصورة ٨٠٠ مرة . فكان التكرار النسبي للصورة $= 0.80$. ولو ألقينا بالقطعة ١٠٠٠٠ مرة أخرى وحصلنا على الصورة ٤٣٠٠ مرة . فكان التكرار النسبي $= 0.43$ نتيجة

$$0.43 = \frac{4300}{10000} = \frac{8600}{20000} \approx 0.43 \text{ تقريباً}$$

وبزيادة عدد التجارب شيئاً فشيئاً نصل إلى الرقم الذي يمكن نسيته احتمال ظمير الصورة وهذا الرقم يصل إلى ٠.٥

الفصل الثاني

أمثلة على الاحتمالات البسيطة

عدد عناصر المجموعة الشاملة $n = (\Omega)$
 عدد عناصر المجموعة الفرعية A أى التى تشمل عناصر المطلوبة $n_A = (A)$
 فى هذه الحالة عدد عناصر المجموعة المتممة للمجموعة A (وهى المجموعة التى
 تحتوى على باقى العناصر التى لا توجد بالمجموعة A ولكنها توجد بالمجموعة
 الشاملة) $n_{\bar{A}} = (\bar{A})$

فى هذه الحالة نجد أن

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{(A)}{(\Omega)}$$

احتمال النجاح

$$P(\bar{A}) = \frac{n_{\bar{A}}}{n} = \frac{(\bar{A})}{(\Omega)}$$

المثل

$$\frac{n_{\bar{A}}}{n} + \frac{n_A}{n} = \frac{(\bar{A})}{(\Omega)} + \frac{(A)}{(\Omega)} = \frac{(\bar{A}) + (A)}{(\Omega)}$$

وكذلك $P(\bar{A}) + P(A) = 1$

$$\frac{(\bar{A}) + (A)}{(\Omega)} =$$

$$1 = \frac{(\Omega)}{(\Omega)}$$

$$(\bar{A}) + (A) = (\Omega)$$

وذلك لأن $n = (\Omega)$

مثال (١):

مجموعة كاملة من ورق اللعب (٢٧ ورقة) سحبت منها ورقة واحدة.
 أوجد احتمال أن تكون الورقة المسحوبة تحمل رقم ٥

الحل:

عدد الأوراق كلها ويساوي عدد الحالات كلها $= ٥٢$
 . . . التي تحمل الرقم ٤ = ٤ ورقات

$$\frac{4}{52} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$\frac{1}{13} =$$

مثال (٢):

في المثال السابق لو فرضنا أننا سحبنا ورقتين مرة واحدة أوجد احتمال أن تكون كل منهما ٤ .

الحل:

عدد الطرق التي يمكن بواسطتها سحب ورقتين من ٥٢ ورقة .
 ${}^{52}P_2 =$

[نريد أن لدينا ٤ ورقات تحمل كل منها الرقم ٤ .
 . . . عدد طرق اختيار ٢ من ٤ $= {}^4P_2$

$$\frac{{}^4P_2}{{}^{52}P_2} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$\frac{٥1 \times ٥٢}{1 \times 2} \div \frac{٢ \times ٤}{1 \times 2} =$$

$$\frac{1}{221} =$$

مثال (٣) :

مندوق يحتوي عل ١ من الكرات البيضاء و ٦ من الكرات الحمراء بحيث
شخص من الكرات بطريقة عشوائية .

أوجد احتمال أن يكون منها ٥ من الكرات البيضاء و ١ من الكرات
الحمراء وذلك بغرض أن :

$$٥ + ١ = ٦$$

$$٦ \geq ١$$

$$٦ \geq ٥$$

الحل :

باستخدام التوافق فإن عدد الطرق التي يمكن بواسطتها اختيار ٥ من
الكرات من (٥+١) من الكرات :

$$٥ + ١ = ٦$$

عدد طرق اختيار ٥ من الكرات البيضاء من ١ من الكرات البيضاء

$$= ١$$

وعدد طرق اختيار ١ من الكرات الحمراء من ٥ من الكرات الحمراء

$$= ٥$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = ١ \times ٥ = ٥$$

مثال (٤) :

مجموعة كاملة من أوراق اللعب عدد أوراقها ٥٢ ورقة تم توزيعها
بالتساوي بطريقة عشوائية على أربعة أشخاص ١ ٢ ٣ ٤ و أوجد
الاحتمالات الآتية :

١ -	أن يكون لدى ١	أى ورقة تحمل رقم ١٠
٢ -	أن يكون لدى ١	ورقة واحدة تحمل رقم ١٠
٣ -	١ ٠ ٠	ورقتان تحملان رقم ١٠
٤ -	١ ٠ ٠	٣ ورقات تحمل رقم ١٠
٥ -	١ ٠ ٠ ٠	أربعة ورقات تحمل رقم ١٠

الحل :

عدد الأوراق = ٥٢ منها ٤ أوراق تحمل الرقم ١٠ .
٦ ورقة لا تحمل هذا الرقم

وبالتالي نفس الطريقة المتبعة في مثال (٣) نجد أن الاحتمالات هي كالآتي:

١ - أن يكون لدى ١ أى ورقة تحمل رقم ١٠

$${}_{12}C^1 \times {}_{12}C^{18} \div {}_{12}C^{22} = \frac{82261}{270720}$$

٢ - أن يكون لدى ١ ورقة واحدة تحمل الرقم ١٠

$${}_{12}C^2 \div {}_{12}C^{18} \times {}_{12}C^1 = \frac{118807}{270720}$$

ملاحظات على الحل :

عدد طرق اختيار ورقة واحدة تحمل رقم ١٠ من ٤ ورقات = ٤

وعدد طرق اختيار ١٢ ورقة وليس بها ورقة رقم ١٠

من ٤٠ ورقة = ${}_{12}C^{18}$

٥ - الحصول على مجموع ٧

٦ - ٨ ١ ١ ١ ١

٧ - ٩ ١ ١ ١ ١

٨ - ١٠ ١ ١ ١ ١

٩ - ١١ ١ ١ ١ ١

١٠ - ١٢ ١ ١ ١ ١

١١ - ١٣ ١ ١ ١ ١

١٢ - ١٤ ١ ١ ١ ١

١٣ - ١٥ ١ ١ ١ ١

١٤ - ١٦ ١ ١ ١ ١

١٥ - ١٧ ١ ١ ١ ١

١٦ - ١٨ ١ ١ ١ ١

ثم أثبت أن مجموع هذه الاحتمالات = ١

الحل :

٦ - احتمال الحصول على مجموع ٣

كل زهرة لها ٦ أوجه تحمل الأرقام ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦
∴ الثلاث زهورات يمكن أن تظهر معاً بعدد من الطرق مقداره

$$٢١٦ = ٦ \times ٦ \times ٦ \text{ طريقة.}$$

∴ مجموع ثلاثة يمكن الحصول عليه من الزهورات الثلاث في حالة واحدة وهي أن تظهر الزهرة الأولى بالرقم ١ والثانية بالرقم ١ والثالثة بالرقم ١.

$$\frac{١}{٢١٦} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

٢ - احتمال الحصول على مجموع ٤

مجموع ٤ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع ٢+١+١

عدد طرق ترتيب هذه الأرقام الثلاثة .

$$(لوجود رقمين متماثلين) \quad \frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{2!}{2!}} =$$

$$3 = \frac{3 \times 2}{1 \times 2} =$$

∴ يمكن الحصول على مجموع ٤ بثلاث طرق .

$$\frac{3}{216} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

٣ - احتمال الحصول على مجموع ٥

مجموع ٥ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع الثلاثة أرقام ٢ ١ ٢
وهذه الأرقام يمكن ترتيبها بعدد من الطرق

$$3 = \frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{2!}{2!}} =$$

كما يمكن الحصول عليه من حاصل جمع ٢ ٢ ١ وهذه الأرقام يمكن
ترتيبها بعدد من الطرق .

$$3 = \frac{\frac{3!}{2!}}{\frac{2!}{2!}} =$$

عدد طرق الحصول على مجموع ٥ = ٦ طرق .

$$\frac{6}{216} = \text{الاحتمال}$$

٤ - احتمال الحصول على مجموع ٦

بمجموع ٦ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع

وتحدث بثلاث طرق مختلفة ١٦١٦٤

وتحدث بعدد من الطرق $2 \times 2 = 4$ طرق ١٦٢٦٢٦

وتحدث بطريقة واحدة ٢٦٢٦٢٦

∴ عدد الطرق الممكنة = ١٠

$$\frac{10}{216} = \text{الاحتمال}$$

٥ - احتمال الحصول على مجموع ٧

بمجموع ٧ يمكن الحصول عليه من ثلاث زهرات من حاصل جمع

يحدث به ٣ طرق ١٦١٦٥

١ ٦ ٥ ١ ١٦٢٦١

٢ ٣ ٥ ٢ ٢٦٢٦٣

٣ ٢ ٥ ٣ ١٦٣٦٢

عدد الطرق الممكنة ١٥ طريقة

$$\frac{15}{216} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

٦ - احتمال الحصول على مجموع ٨

١٦١٦٥

١ ٦ ٥ ١ ١٦٢٦١

٢ ٣ ٥ ٢ ٢٦٢٦٣

١	٦	٢	٦	٤	تحدث بـ ٦ طرق
١	٦	٢	٦	٤	٠ ٣ ٠ ٠
١	٦	٢	٦	٢	٠ ٣ ٠ ٠
<hr/>					٢١ طريقة

$$\frac{21}{216} = \text{والاحتمال}$$

٧ - احتمال الحصول على مجموع ٩

١	٦	٢	٦	٦	مجموع ٩ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع
١	٦	٢	٦	٥	تحدث بـ ٦ طرق
١	٦	٢	٦	٥	٠ ٣ ٠ ١
١	٦	٢	٦	٥	٠ ٦ ٠ ١
١	٦	٢	٦	٤	٠ ٣ ٠ ١
١	٦	٢	٦	٤	٠ ٦ ٠ ١
١	٦	٢	٦	٣	٠ ٣ ٠ ١
<hr/>					٢٥ طريقة

$$\frac{25}{216} = \text{الاحتمال}$$

٨ - احتمال الحصول على مجموع ١٠

١	٦	٢	٦	٦	مجموع ١٠ يمكن الحصول عليه من حاصل جمع
١	٦	٢	٦	٤	تحدث بـ ٦ طرق
١	٦	٢	٦	٤	٠ ٣ ٠ ١
١	٦	٢	٦	٣	٠ ٦ ٠ ١
١	٦	٢	٦	٣	٠ ٣ ٠ ١
١	٦	٢	٦	٢	٠ ٦ ٠ ١
١	٦	٢	٦	٢	٠ ٣ ٠ ١
<hr/>					٢٧ طريقة

$$\frac{27}{216} = \text{الاحتمال المألوف}$$

وبالتل يمكن إثبات أن احتمالات الحصول على المجاميع ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨

$$= \frac{27}{216} \text{ و } \frac{25}{216} \text{ و } \frac{11}{216} \text{ و } \frac{15}{216} \text{ و } \frac{10}{216} \text{ و } \frac{6}{216} \text{ و } \frac{3}{216} \text{ و } \frac{1}{216} \text{ على الترتيب}$$

وبجمع كل الاحتمالات السابقة نحصل على واحد صحيح .

وهذا يدعى لأنه من المؤكد عند لقاء ثلاث زعمرات الحصول على أحد
المجاميع السابقة .

الفصل الثالث

الاحتمالات المركبة

أولاً : أنواع الحوادث

تقسم الحوادث إلى ثلاثة أنواع رئيسية :

١ - الحوادث الطاردة أو المانعة أو المتنافرة Mutually exclusive

يقال للحوادث بأنها مانعة أو طاردة إذا كان حدوث أحد الحوادث يمنع حدوث الأخرى .

فمثلاً عند إلقاء زهرة زرد مرة واحدة فإن الحصول على رقم معين ولكن رقم ٥ يمنع الحصول على أى من الأرقام الأخرى فيعتبر الحدث وهو الحصول على رقم ٥ حدث مانع بالنسبة للآحداث الأخرى وهو الحصول على رقم ١ و ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٦

وفى المثال السابق نجد أن المجموعة الشاملة عند إلقاء زهرة الزرد تتكون من ٦ عناصر وإذا قمنا بأن الحدث ١ هو الحصول على رقم ٥ والحدث ٢ هو الحصول على رقم ٦ عند إلقاء الزهرة ، فإن تحقق أحد الحادتين يمنع تحقق الآخر ونقول ،

حدثان ١ ، ٢ حدثان متنافران ومعنى هذا أنه لا يوجد عناصر مشتركة للحادثين .

وعلى ذلك فالحدث ١ ب (أى حدوث الحادثين معاً) هو حدث مستحيل واحتماله = ٠

ب = حدث كل من ا : ب

ح (ا ب) = احتمال حدوث الحدثين ا ، ب معا = صفر

ح (ا ∪ ب) = احتمال حدوث ا أو ب أو هما معا

لاى حدثين متنافرين ا ، ب فإن احتمال حدوث أحدهما أو كلاهما .

$$ح (ا ∪ ب) = ح (ا) + ح (ب)$$

وبعبارة أخرى :

إذا كان كل من ا ، ب مجموعة فرعية من المجموعة الشاملة S ولا توجد عناصر مشتركة بينهما فإن احتمال حدوث أحد الحدثين أو كلاهما

$$= ح (ا) + ح (ب)$$

والاجمعتان ا ، ب في هذه الحالة منفصلتان "disjoint"

مثال (١) :

ألقيت زهرتين من زهرات الترد
ما احتمال الحصول على مجموع ٩ أو مجموع ٧

الحل

العدائان متافران

عدد عناصر المجموعة الأساسية

$$= ٦ \times ٦ = ٣٦$$

نفرض أن الحدث ا هو الحصول على مجموع ٩ عدد عناصر المجموعة الفرعية ا = ٤

$$ح (ا) = \frac{٤}{٣٦} = \frac{١}{٩}$$

عدد عناصر المجموعة الفرعية $u = 7$

$$\frac{1}{7} = \frac{1}{31} = (u) \mathcal{E}$$

$$(u) \mathcal{E} + (1) \mathcal{E} = (u+1) \mathcal{E}$$

$$\frac{10}{56} = \frac{1}{7} + \frac{1}{9} =$$

كما هو موضح من التحليل :

وجه الزهرة الثانية

٦	٥	٤	٣	٢	١	
٧	٦	٥	٤	٣	٢	١
٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢
٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣
١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤
١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥
١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦

وجه الزهرة الأولى

مجموع وجهي الزهرتين

والمعاداة السابقة قائمة عامة مهما تعددت المرات

٢- المراتب المشتركة جزئيا

رسم المراتب المشتركة جزئيا بين عناصر مشتركة أي ليست طارئة لبعدها البعض
فإذا كان لدينا المجموعة الفرعية u وكان لدينا المجموعة الفرعية v أو العكس الفرعية v
بأن

عندما المبرهنة الفرعية هي نفس كل العناصر التي تسمى عناصر
المجموعة الفرعية u أو v أو $u \cap v$

ون هذه الحالة نجد أن :

إحتمال حدوث العادتين هما أى حدوث ١ ، ب معا يرمز له بالرمز

$$\frac{(b \cap 1) \cdot}{(5) \cdot} = (b \cap 1) \cdot$$

مثال (٢)

مجموعة كلالة من أوراق اللعب (٥٢ ورقة) سحبنا منها ورقة واحدة ما إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة بيضا وتعمل اللون الأحمر .

الحل

$$52 = (5) \cdot$$

$$\cdot (1) \cdot \text{عدد الأوراق الحمراء} = 26$$

$$\cdot (b) \cdot \text{عدد البيضا} = 26$$

$$\cdot (b \cap 1) \cdot = \text{عدد الأوراق التي تحمل اللون الأحمر وبيضا في نفس الوقت} = 26$$

$$\frac{1}{52} = \frac{26}{52} = (b \cap 1) \cdot$$

إحتمال حدوث أحد العددين أو كلاهما :

$$(b \cap 1) \cdot - (b) \cdot + (1) \cdot = (b \cap 1) \cdot$$

$$\frac{(b \cap 1) \cdot}{(5) \cdot} - \frac{(b) \cdot}{(5) \cdot} + \frac{(1) \cdot}{(5) \cdot} =$$

$$\frac{(b \cap 1) \cdot - (b) \cdot + (1) \cdot}{(5) \cdot} =$$

وبلاحظ أننا طرحنا (٣١ -) لأنه لو أضفنا عناصر ١ على عناصر
٢ دون طرح فإن هذا يعني أننا أخذنا العناصر المشتركة بين ١، ٢ في الاعتبار
مرتين .

مثال - (٣) :

في المثال السابق رقم ٢ ما احتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنتا أو أن
تكون حمراء .

الحل

$$\frac{(١)٥ + (٢)٥ - (٣)٥}{(٥)٥} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$\frac{٢ - ٤ + ٢٦}{٥٢} =$$

$$\frac{٧}{١٣} = \frac{٢٨}{٥٢} =$$

وبلاحظ أن العناصر المشتركة عددها ٢ لأن هناك بنتان لونهما أحمر وهاتان
البنتان يعتبران من عناصر ١، ٢ على حد سواء .

٣ - الحوادث المنفصلة Separate Events

الحوادث التي لا تتداخل مع بعضها البعض والتي لا تتداخل في بعضها البعض
تسمى حوادث منفصلة - وبلاحظ أن الحوادث المنفصلة تنقسم إلى مجموعات
نتائج منفصلة - فلي سبيل المثال إذا ألقينا عملة إلى أعلى فإنه من الممكن
أن نحصل على صورة أو رقم .

وفي هذه الحالة تتكون مجموعة النتائج من عنصرين أي

[ص ، ٦ مم]

واحتساب الحصول على صورة $\frac{1}{2}$

ولو أننا ألقينا بالعملة مرة ثانية إلى أعلى فإنه تكون لدينا مجموعة نتائج جديدة
أى [صم ، صم]

والحدث والحصول على صورة في المرة الأولى، منفصل تماما عن الحدث والحصول على صورة في الرمية الثانية، لأن كل منهما ينتمى إلى مجموعة نتائج منفصلة وتتقسم هذه الحوادث إلى حوادث مستقلة وأخرى غير مستقلة .

وسنكتفى الآن بالقول بأن الحوادث المستقلة هي الحوادث التى لا يؤثر تحقق أحدها أو عدم تحققه فى الحوادث الأخرى

وأما الحوادث غير المستقلة فهى الحوادث التى ترتبط ببعضها البعض بحيث أن حدوث أحدها يؤثر فى الحوادث الأخرى

فلو كان لدينا كيس به بعض الكرات الحمراء وبعض الكرات الصفراء فإن عملية سحب كرة من الكيس بطريقة عشوائية (١) مثلا لا يؤثر فى عملية سحب كرة من الكيس مرة ثانية (ب) مثلا إذا كانت الكرة التى تم سحبها فى المرة الأولى مستعاد إلى الكيس قبل إجراء السحب فى المرة الثانية

فيمتد الحداثان ١ ، ب مستقلان عن بعضهما وأما لو كانت الكرة التى سحبت من الكيس فى المرة الأولى لم ترد إلى الكيس قبل السحب الثانى لكانت العملية ١ تأثير على العملية ب ولكان الحداثان مرتبطين ببعضهما البعض

الاحتمال المشترك لحدوث حدثين أو أكثر من الحوادث المستقلة

١ ب حدثان مستقلتان عن بعضهما البعض وإحتمال حدوثهما

$$= P(1) \cdot P(2) \text{ على الترتيب}$$

احتمال حدوث الحدثين ١ ، ب معا

$$P(1) \cdot P(2) = P(1) \times P(2) \text{ (ب)}$$

وبالمثل

$$P(A, B, C, D, \dots) = P(A)P(B)P(C)P(D) \dots \quad (٥)$$

الإحتمال الشرطي :

في المثال السابق لاحظنا أن الأحداث مستقلة بعضها البعض لهذا فإن احتمال حدوث الحدث ب بفرض أن الحدث أ تحقق يرمز له بالرمز

$$P(B/A)$$

لأنه لا يوجد أي تأثير للحدث أ على الحدث ب

وعلى ذلك ففي الأحداث المستقلة فإن الاحتمال الشرطي لحدث ب بفرض أن الحدث أ قد تحقق = احتمال حدوث الحدث ب

وأما لو كانت الأحداث غير مستقلة "Dependent"

فإن الاحتمال الشرطي للحدث ب وهو

$$P(B/A) \text{ لا يساوي } P(B)$$

وعلى ذلك فاحتمال حدوث عدة حوادث غير مستقلة أ، ب، ج،

$$= P(A)P(B/A)P(C/A, B) \text{ وهكذا}$$

أي يساوي احتمال حدوث الحادث الأول \times احتمال حدوث الحادث الثاني بفرض أن الحادث الأول قد تحقق \times احتمال حدوث الثالث بفرض أن الحادثين الأول والثاني قد تحققا .

وعموما نجد أن القاعدة التي تطبق في حالة الحوادث المستقلة وفي المستقلة هي قاعدة الضرب مع تأنيق واحد ، غير أنه بالقسمة للحوادث غير المستقلة يجب أن نلاحظ أنه عندما تضرب الاحتمال الأول في الثاني بحسب الاحتمال الثاني بفرض أن الأول قد تحقق .

والآلة الآتية توضح لنا الفرق بين الأحداث المستقلة وغير المستقلة .

مثال ٤ :

ألقيت بقطعة من التفرود المتعاطلة مرتين إلى أعلى . أوجد احتمال الحصول على صورة في المرتين .

الحل :

احتمال الحصول على صورة في المرة الأولى $= \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}$ = الثانية

وحيث أن كل حدث من الحادثين مستقل تماماً عن الآخر ، ولا يوجد أى ارتباط بينهما . فإننا نطبق القاعدة

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} =$$

مثال ٥ :

كيس به ١٠ كرات حمراء ، ٤ كرات زرقاء . سحبنا كرة من الكيس ولم نردها ، ثم سحبنا كرة أخرى من الكيس ، أوجد احتمال أن تكون كل من الكرتين المسحوبتين زرقاء .

الحل :

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{14} = \text{احتمال سحب كرة زرقاء في المرة الأولى}$$

$$\frac{3}{13} = \text{احتمال سحب كرة زرقاء في المرة الثانية}$$

$$\frac{6}{65} = \frac{2}{5} \times \frac{3}{13} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

ملاحظات على الحل : الاحتمالات هنا غير مستقلة .

$$P(A) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

$$\frac{1}{91} = \frac{3}{13} \times \frac{2}{7} =$$

لأن $P(A) = P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$ تساوى احتمال سحب الكرة الزرقاء و المرة الثانية بفرض أن الاحتمال في الأولى قد تحقق ، أى كانت الكرة المسحوبة في المرة الأولى زرقاء .

أمثلة عامة على الاحتمالات

المثال الأول :

إذا كان لدينا عملية معينة ورمزنا لاحتمال النجاح بالرمز p واحتمال الفشل بالرمز q .

فما هو احتمال نجاح هذه العملية خلال n من المرات الأولى المتتالية وفشلها في باقي المرات وذلك بفرض أننا كررنا هذه العملية n من المرات بنفس الطريقة وفي نفس الظروف .

الحل :

احتمال النجاح في كل مرة $= p$

\therefore احتمال النجاح n من المرات الأولى المتتالية $= p^n$

q احتمال الفشل في المرات n وعندها $(1-p) = q$

\therefore الاحتمال المطلوب $= p^n \times q^{n-p}$

المثال الثاني :

في المثال الأول أوجد احتمال نجاح العمل n المرات .

الحل :

في المثال الأول حصلنا على احتمال نجاح العملية خلال n من المرات p^n ونلاحظ أنه إذا كررنا هذه العملية n من المرات n فاحتمال نجاح العملية في كل مرة p^n .

ونلاحظ في هذا المثال أننا نريد الحصول على احتمال نجاح العملية في كل مرة من المرات دون أن تتوقف بعدها من المرات الأولى المتتالية . ولهذا لا بد من ضرب الاحتمال الذي حصلنا عليه في المثال الأول في عدد طرق اختيار n من المرات

من بين ٥ من المرات أى بضرب الاحتمال السابق $\times ٢^{-٥}$ وبهذا يكون الاحتمال المطلوب .

$$= ٢^{-٢} \times ٢^{-٥} \times \frac{١}{٢ - ٥ - ٢}$$

المثال الثالث .

أُقيمت بطولة أن التقود المتتالية ١٠ مرات متتالية إلى أعلى .

أوجد احتمال الحصول على صدارة في المراتين الأولى والثانية فقط .

الحل

الاحتمال المطلوب :

$$\frac{١}{١٠٢٤} = {}^{10}\left(\frac{١}{٢}\right) = {}^4\left(\frac{١}{٢}\right) \times {}^6\left(\frac{١}{٢}\right) =$$

وذلك تطبيقاً لقاعدة السابقة في المثال الأول .

الاحتمال المطلوب = $٢^{-٤} \times ٢^{-٦}$

عدد مرات التجربة = ١٠ أى $١٠ = ٥ + ٥$

عدد مرات الحصول على الصدارة = ٢ أى $٢ = ٢$

$$٨ = ٢ - ٥$$

احتمال الحصول على الصدارة = $\frac{١}{٢}$ و المرة الواحدة

احتمال الحصول على الكذبة = $\frac{١}{٢}$

المثال الرابع :

في المثال السابق :

أوجد احتمال الحصول على صيرتين :

الحل :

بالاسترشاد بالمثال رقم (٢) فإن .

$$\begin{aligned} \text{الاحتمال المطلوب} &= {}^2C_1 \times {}^{10}C_1 \times {}^{10}C_1 \\ &= {}^2C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{2 \times 10}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right) = \\ &= \frac{10}{2} = 5 \end{aligned}$$

المثال الخامس .

صندوق به ٨ كرات متشابهة في كل شيء عدا اللون منها ٥ كرات حمراء و ٣ كرات بيضاء ، سحب شخص كرة من الصندوق بطريقة عشوائية ثلاث مرات متتالية ، فإذا علم أنه كان يرد الكرة إلى الصندوق سحب كل مرة بسحب فيها الكرة .

فأوجد احتمال أن تكون الكرات التي تم سحبها منها ٢ حمراء وواحدة بيضاء ،

الحل :

$$\text{احتمال سحب كرة حمراء في المرة الواحدة} = \frac{5}{8}$$

احتمال سحب كرة بيضاء في المرة ٢ واحدة $\frac{1}{8}$

عند مرات السحب ٣ مرات .

ولو كان الاحتمال المطلوب هو سحب كرة حمراء في المراتين الأولى والثانية
ريضاء في الثالثة .

$$\frac{3}{8} \times \frac{6}{8} \times \frac{6}{8} = \text{لكان هذا الاحتمال}$$

$$\frac{3}{8} \times \left(\frac{6}{8}\right) =$$

ولكن نظراً لأنه لم يحدد لنا هذا التحديد بل طلب منا احتمال الحصول
على كرتين حمراوتين خلال المرات الثلاث فإن هذه العملية تحدث بعدد من الطرق
تقاربه $3 = 3$

لأنه يمكن أن نحصل على كرة حمراء إما

	في المرة الأولى والثانية
٣ حالات	أو المرة الأولى والثالثة
	أو المرة الثانية والثالثة

على حذا يكون الاحتمال المطلوب :

$$\frac{3}{8} \times \left(\frac{6}{8}\right) \times 3 =$$

$$\frac{27}{512}$$

المثال السادس :

يحب شغفر ورقتين من مجموعة كاملة من أوراق اللعب . أريد احتمال أن تكون كل من الورقتين المجهورتين ولداً .

الحل :

عدد الطرق التي يمكن بواسطتها سحب ولدين من أربعة أولاد .

$${}^4P_2 =$$

$$6 =$$

6 عدد طرق سحب ورقتين من ٥٢ ورقة ${}^{52}P_2 =$

$${}^{52}P_2 = \frac{52 \times 51}{1 \times 2} = 1326 \text{ طريقة}$$

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = \frac{1}{1326}$$

$$= \frac{1}{221}$$

المثال السابع :

ما هو احتمال الحصول على زوج وبنات في المثال السابق ؟

الحل :

$$\frac{{}^{16}P_2 \times {}^{16}P_2}{{}^{16}P_4} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$= \frac{16}{1326}$$

$$= \frac{8}{663}$$

٣ - احتمال قيد مائتي ذكور و مائة إناث

$$= ٢٠٢ \times ٥٢ \times ٥٢ \times ٤٨ \\ = ١٢٩٧٩٢ \times ٢ = \\ = ٢٥٩٥٨٤$$

٤ - احتمال قيد مائتي إناث و مائة ذكور

$$= ٢٠٢ \times ٤٨ \times ٤٨ \times ٥٢ = \\ = ١١٩٨٠٨ \times ٢ = \\ = ٢٣٩٦١٦$$

٥ - مجموع الاحتمالات السابقة

$$= ١٢٠٦٠٨ + ١١٠٥٩٢ + ٢٨٩٦٢٦ + ٢٥٩٤٢٤ = \\ = \text{واحد صحيح}$$

أى أنه من المتأكد أن تكون حالات القيد يسجل الموقيد إحدى الحالات الأربع السابقة

المثال التاسع :

باستخدام النتائج التي حصلت عليها في المثال السابق - أوجد الاحتمالات الآتية :

١ - أن تكون حالة قيد واحدة على الأقل من الذكور .

٢ - أن تكون حالة قيد على الأكثر من الإناث .

الحل :

١ - أن تكون حالة قيد واحدة على الأقل من الذكور يتحقق الاحتمال المطلوب إذا كان هناك حالة قيد واحدة من الذكور أو إذا كان هناك حالتين من الذكور أو إذا كانت حالات القيد الثلاث من الذكور .

ومن المثال السابق نجد أن الاحتمال المطلوب .

$$= ٣٥٩٤٢٤ + ٣٨٩٣٧٦ + ١٤٠٦٠٨ , \\ = ٨٨٩٤٠٨ ,$$

يمكن اخذ طريقة أسهل من الطريقة السابقة كما يلي :

مجموع الاحتمالات كلها = واحد صحيح .

٦ الحالة الوحيدة التي لا تحقق لنا الاستدلال هي الحالة التي تفيد بها الحالات
ثلاث إناث .

ولكن :

$$\text{احتمال قيد الثلاث حالات إناث} = ١١٠٥٩٢ ,$$

$$\therefore \text{الاحتمال المطلوب} = ١ - ١١٠٥٩٢ , \\ = ٨٨٩٤٠٨ ,$$

وهو نفس الجواب الذي حصلنا عليه من الحل الأول .

٢ - أن تكون حالتنا قيد على الأكبر من الإناث .

الاحتمال المطلوب = احتمال عدم وجود إناث (احتمال حالات الذكور)

+ احتمال قيد حالة إناث واحدة

+ احتمال قيد حالتين إناث .

$$= ٣٥٩٤٢٤ + ٣٨٩٣٧٦ + ١٤٠٦٠٨ , \\ = ٨٨٩٤٠٨ ,$$

٦ الاحتمال المطلوب = ١ - (احتمال قيد الثلاث حالات إناث)

$$= ١ - ١١٠٥٩٢ , \\ = ٨٨٩٤٠٨ ,$$

المثال العاشر :

كيس به ٣ كرة مائة ٤ كرات سوداء ٨ كرات خضراء ١٨ ٦ كرة صفراء . سحبنا منه ٨ كرات بطريقة عشوائية . أوجد - احتمال أن يكون منها ٣ كرات سوداء ٢ ٦ خضراء ٣ صفراء .

الحل :

$$\frac{{}^{١٨}C_٣ \times {}^{٢٨}C_٢ \times {}^{٤}C_٣}{{}^{٤٨}C_٨} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$\frac{٨١٦ \times ٢٨ \times ٤}{٥٨٥٢٩٢٥} =$$

$$\frac{٩١٣٩٢}{٥٨٥٢٩٢٥} =$$

المثال الحادي عشر :

صندوقان بالآول ٥ كرات حمراء ٣ كرات بيضاء وبالثاني ٦ كرات حمراء ٥ كرات بيضاء . فإذا سحبنا كرة من كل صندوق بطريقة عشوائية فأوجد احتمال :

١ - أن تكون كل من الكرتين المسحوبتين اللون حمراء .

٢ - أن تكون كل من الكرتين المسحوبتين بيضاء اللون .

٣ - أن تكون إحداهما حمراء والأخرى بيضاء .

ثم أوجد مجموع الاحتمالات السابقة .

الحل:

$$\frac{5}{8} = \text{احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الأول}$$

$$\frac{2}{8} = \text{احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق الأول}$$

$$\frac{6}{11} = \text{احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الثاني}$$

$$\frac{5}{11} = \text{احتمال سحب كرة بيضاء من الصندوق الثاني}$$

وعلى ذلك:

$$\frac{6}{11} \times \frac{5}{8} = \text{احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان حمرا وتين}$$

$$\frac{30}{88} =$$

$$\frac{5}{11} \times \frac{2}{8} = \text{احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان بيضا وتين}$$

$$\frac{10}{88} =$$

٣ - احتمال أن تكون إحدى الكرتين حمراء والاخرى بيضاء معناه
احتمال أن تكون الكرة المسحوبة من الصندوق الأول حمراء ومن الصندوق
الثاني بيضاء أو العكس (الكرة المسحوبة من الصندوق الأول بيضاء ومن
الثاني حمراء) .

وحيث أن العلاقة هنا علاقة مضافة أو طارئة لأن حدوث الحدثين بالعطف
الأمراء يمنع حدوث الآخر فمجموعتهما

∴ الاحتمال المطلوب = مجموع الاحتمالين

$$\left(\frac{6}{11} \times \frac{2}{8}\right) + \left(\frac{5}{11} \times \frac{5}{8}\right) =$$

$$\frac{12}{88} + \frac{25}{88} =$$

$$\frac{37}{88} =$$

ومجموع الاحتمالات في (١) و (٢) و (٣)

$$\frac{37}{88} + \frac{10}{88} + \frac{30}{88} =$$

= واحد صحيح لأنه من المؤكد تحقق أحد الاحتمالات السابقة .

المثال الثاني عشر :

والهدف من هذا المثال هو إضاح بعض الحقائق الهامة لنظرية الاحتمالات .

نفرض أن خبرة الماضي لوكيل شركة أو بل أقيمت الحقائق الآتية . -

عدد السيارات المباعة ماركة ركورد = ٦٠٠ سيارة

عدد السيارات المباعة ماركة كلويت = ٤٠٠ سيارة

بالنسبة لسيارات الركورد يمين أن الألوان كانت كما يلي :

٣٠٠ بيضاء ، ٢٠٠ حمراء ، ١٠٠ سوداء

وبالنسبة لسيارات الكاديك كانت الألوان كما يلي : —
٤٥٠ بيضاء ، ١٨٠ حمراء ، ٧٠ سوداء

على هذه الحالة وبفرض أن ما سيحدث في المستقبل هو صورة من الماضي
وبفرض أن :

الاحتمال

شراء سيارة وكورد = M

شراء سيارة كلريت = C

اللون الأبيض = L_1

اللون الأحمر = L_2

اللون الأسود = L_3

في هذه الحالة يمكن إستنتاج الاحتمالات الآتية : —

١ — احتمال طلب سيارة وكورد

$$P(M) = \frac{P(M)}{P(\Omega)}$$

$$,6 = \frac{600}{1000} =$$

٢ — احتمال طلب سيارة كاديك = $P(C) = \frac{400}{1000}$

سكدا

بهذا يمكن تمثيل جدول احتمالات دلائل جدول خبرات المسمى

جدول الحيرة

اللون ←	النوع ↓	أبيض	أحمر	أسود	المجموع
		٢٠٠	٢٠٠	١٠٠	٦٠٠
	ك.ا.ت	١٥٠	١٨٠	٧٠	٤٠٠
	المجموع	٤٥٠	٣٨٠	١٧٠	١٠٠٠

جدول الإحتمالات

	ل	ل	ل	المجموع
س	٣٠	٢٠	١٠	٦٠
ك	١٥	١٨	٧	٤٠
المجموع	٤٥	٣٨	١٧	١٠٠

ويمكن من الجدول السابق إستنتاج الإحتمالات الآتية : —

١ - احتمال أن العميل يطلب سيارة ركورد نوناً أيضاً

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A) =$$

$$\frac{300}{1000} =$$

$$0,30 =$$

ويمكن الحصول على هذا الاحتمال من الجدول مباشرة
(عمود أول صف أول)

٢ - احتمال أن العميل يطلب سيارة كاديلاك حمراء

$$\frac{P(A \cap C)}{P(A)} = P(C|A) =$$

$$\frac{180}{1000} =$$

$$0,18 =$$

وهذا الاحتمال يمكن الحصول عليه من الجدول مباشرة
(عمود ثان صف ثان)

ومكافئاً بالنسبة لباقي الاحتمالات التي يمكن الحصول عليها من الجدول

وبلاحظ أن $P(B) = 0,30$ أي احتمال أن يطلب العميل سيارة ركورد

وهو يساوي $0,30 + 0,20 + 0,10$

أي أن

$$P(B) = P(B|A) + P(B|B) + P(B|C)$$

وبطلق على ذلك الاحتمال الحدي للحدث B

أي أن الاحتمال الحدي للحدث B

يعبر عن احتمالات الحوادث التي لها نوعان هذا الحدث

وعلى ذلك فالإحتمال الخدعي لأن يطلب العميل سيارة ركورد من أى نوع
= إحتمال أن يطلب العميل سيارة ركورد

والآن ننقل إلى إحتمال آخر

مامو إحتمال أن الشخص الذى يريد سيارة ركورد سيختار اللون الأبيض ؟
والمقصود هنا

هو أن العميل قد اختار فعلا السيارة تركورد وأن المطلوب هو قياس إحتمال
أن يكون اللون أبيضاً

أى الإحتمال الشرطى بأن العميل سيختار سيارة بيضاء يفرض بأن لدينا
الحقيقة المقررة سلفاً وهو أن نوع السيارة المطلوبة ركورد :

في هذه الحالة تصبح لدينا مجموعة الحلول $n = 2$ $100 =$
وعدد السيارات البيضاء $= 300$

$$\frac{1}{4} = \frac{300}{1200} = \text{الإحتمال}$$

ويمكن كتابة هذا الاحتمال كما يلي : -

$$\frac{(n, L, 1) \cdot n}{(n) \cdot n} = (n, L, 1) \cdot n$$

$$\frac{1}{4} = \frac{300}{1200} =$$

وهذا الإحتمال يختلف عن الإحتمال المشترك لطلب سيارة ركورد وبمعناه
لأن هذا الإحتمال الأخير

$$\frac{(n, L, 1) \cdot n}{(n) \cdot n} = (n, L, 1) \cdot n =$$

$$\frac{300}{1200} =$$

وهو يساوي احتمال طلب سيارة ركورد \times احتمال أن تكون السيارة بيضاء

$$\frac{300}{1000} = \frac{300}{600} \times \frac{600}{1000} =$$

ويلاحظ أن الاحتمال الشرطي

$$\frac{P(L, R)}{P(R)} = P(L/R)$$

$$= \frac{P(L, R) \div P(R)}{P(R) \div P(R)}$$

وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على $P(R)$

$$= \frac{P(L, R)}{P(R)}$$

\Rightarrow الاحتمال المشترك لطلب سيارة ركورد وبيضاء مقسوماً على احتمال طلب سيارة ركورد من أي لون

وعموماً :

الاحتمال الشرطي لحدث B بفرض تحقق حادث آخر $A \Rightarrow$ الاحتمال المشترك للحدثين A و B مقسوماً على الاحتمال الذي لأحدث A

$$P(B/A) = \frac{P(A, B)}{P(A)}$$

محاولات بزنولي

Bernoulli Trials

إذا عرفنا إحصاء نجاح حدث معين فإننا نعرف في نفس الوقت إحصاء الفشل ،
لأن إحصاء النجاح + الفشل = ١ كما سبق الإشارة إليه

فإذا كانت p هي القيمة التي تشمل حالات النجاح ، q هي القيمة التي تشمل
حالات الفشل

$$p + q = 1$$

$$q = 1 - p$$

$$p = 1 - q$$

$$1 = p + q$$

وحيث p و q متساويان فإن

$$p = q = 0.5$$

أي أن

$$p = q = 0.5$$

وبذا نحصل على نتائج من سلسلة معينة في الماضي ووجدنا أن $p = 0.5$ منها فاسداً ،
٩٥٪ منها

فإن خبرة الماضي هذه تقيدنا في الإجابة على السؤال الآتي :

إذا كان إحصاء النجاح = ١ نجد وحدة واحدة = ١٠٠ فاهم إحصاء أن تكون ٢٥
وحدة واحدة من بين ١٠٠ وحدة تم فحصها

الإحتمال المطلوب

$$= 100 \times 100 \times 100$$

يرتد نسق أن أرضها السبب في الضرب في ١٠٠

لأنه من الممكن أن تكون الخمسة وعشرين وحدة الأولى فائدة والباقي سلبي
ومن الممكن أن يكون الخمسة وعشرين وحدة من رقم ٢ إلى ٢٦ فائدة أو من
رقم ٣ إلى ٢٧ وهكذا

لهذا ويجب أن نختار ٣٥ وحدة من ١٠٠ . وكل محاولة من هذه المحاولات
تسمى محاولة برنولي وعندما تكون هذه المحاولات مستقلة عن بعضها البعض
وأن نتيجة أي محاولة ليس لها تأثير على المحاولات الأخرى وبفرض أن احتمال
النجاح = ح واحتمال الفشل = ل

فإن

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

وتسمى هذه العلامة بالإحتمال ثنائي الحدين لأنه من الممكن استقطابها من
مفكوك ذات الحدين $(C + L)^n$

وبتطبيق هذه العلامة في حالة القاء زهرة واحدة من زهرات التردد عدة مرات
يمكن الحصول على الإحتمالات الآتية وذلك بفرض أن احتمال النجاح وهو
الحصول على رقم ٦ في المرة الواحدة = $\frac{1}{6}$ واحتمال الفشل = $\frac{5}{6}$

وأما أجريتنا التجربة ٥ مرات فإنه يمكن حساب احتمال النجاح صفر مرة ،
مرة واحدة ، مرتين ، ، ، ، ٥ مرات

وذلك بإعطاء مر القم

صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ في البلاطة

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

عل الوجه الآتي :

$س =$ عدد مرات النجاح ، $ح (س) =$ احتمال النجاح $س$ من المرات

س	$ح (س)$
صفر	$١٠ صفر (١/٢) صفر (١/٢)$
١	$١٠ صفر (١/٢) (١/٢) (١/٢)$
٢	$١٠ صفر (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢)$
٣	$١٠ صفر (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢)$
٤	$١٠ صفر (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢)$
٥	$١٠ صفر (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢)$

ويلاحظ ان هذه النتائج يمكن الحصول عليها من مفكوك المقدار ذو الحدين

$$(١/٢ + ١/٢)^{١٠}$$

ومعنى هذا أنه لو كان لدينا احتمال النجاح والفشل لحالة الواحدة أو، فالتجربة

الواحدة فإنه من الممكن حساب احتمال النجاح لأي عدد من التجارب .

ويمكن أن نقيس الإحتمالات المختلفة

مثال (١) :

هذا افتد. زمرة نرد ما احتمال الحصول عل رقم ٦ مرتين من ١٠ مرات

الحل

$$\text{الاحتمال} = ١٠ صفر (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢) (١/٢)$$

مثال (٢) :

ما احتمال الحصول عل رقم ٦ مرتين عل الأكثر (من المثال السابق

الحل

$$\begin{aligned}
 \text{الاحتمال } E(2 \geq 1) &= \\
 E(2 = 1) + E(2 = 0) + E(2 = 1) &= \\
 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \\
 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) &= \\
 \text{مثال (3):} &
 \end{aligned}$$

القيت بعملة ٤ مرات الى أعلى
أوجد احتمال الحصول على صورة ٣ مرات على الأكثر

الحل

$$\begin{aligned}
 \text{الاحتمال هو } E(2 \geq 1) &= \\
 E(2 = 1) + E(2 = 0) + E(2 = 1) &= \\
 E(2 = 1) + E(2 = 0) &= \\
 \frac{10}{16} = \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4}{16} + \frac{1}{16} &=
 \end{aligned}$$

يمكن الوصول الى الحل بطريقة الإحصاء كما يلي :

الملاحظة الوحيدة التي لا تحقق لإحتمال هي حالة الحصول على الصور

٤ مرات

احتمال الحصول على الصورة ٤ مرات

$$\begin{aligned}
 &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \\
 &= \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 =
 \end{aligned}$$

$$\frac{15}{16} = \frac{1}{16} - 1 = \text{الإحتمال المطلوب}$$

مثال (٤)

آلة تنتج حلقة معينة فإذا دلت التجارب على أن احتمال أن تكون الحلقة مطربة = ٠,٥، أخذنا ٥ وحدات بطريقة عشوائية

أوجد الاحتمالات الآتية :-

(١) أن تكون الثلاث وحدات الأولى مطربة

(٢) أن تكون ثلاث وحدات مطربة تماماً

(٣) أن تكون ثلاث وحدات مطربة على الأقل

(٤) أن تكون ثلاث وحدات مطربة على الأكثر

الحل

(١) أن تكون الثلاث وحدات الأولى مطربة

نعني ذلك أن الـ ٥ وحدات الأخرى سليمة ويكون الاحتمال

$$= {}^2(0,5) {}^2(0,5)$$

(٢) أن تكون ثلاث وحدات مطربة

$$= {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5)$$

(٣) أن تكون ثلاث وحدات مطربة على الأقل

$$= {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5)$$

$$= {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5)$$

$$= {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5) {}^2(0,5)$$

(٤) أن تكون ثلاث وحدات مطربة على الأكثر

$$(r \geq s) \mathcal{E} =$$

$$(r \leq s) \mathcal{E} - 1 =$$

$$(r = s) \mathcal{E} + (r = s) \mathcal{E} + (r = s) \mathcal{E} =$$

$$(r = s) \mathcal{E} +$$

$$^1(r, s)(r, s), u^0 + ^0(r, s) =$$

$$^2(r, s)^2(r, s), u^0 + ^2(r, s)^2(r, s), u^0 +$$

$$[^0(r, s) + (r, s)^1(r, s), u^0] - 1 =$$

تمارين متنوعة على الاحتمالات

١ - ألقيت بذرة من زمرات الرد مرتين متتاليتين لحسب احتمال الحصول على الرقم ٦ مرة على الأقل .

٢ - صندوقان بالاول ١ كرات زرقاء و ٥ كرات بيضاء وبالثاني ٤ كرات زرقاء و ٦ كرات بيضاء سحبنا كرة من كل صندوق بطريقة عشوائية ، أوجد احتمال :

(١) أن تكون كلاهما زرقاء

(ب) بيضاء .

(ج) إحداهما زرقاء والاخرى بيضاء .

(د) أوجد مجموع الاحتمالات السابقة .

٣ - صندوق به ٥ كرات حمراء و ٢ كرات زرقاء و ٦ كرات خضراء وسحبنا منه كرة بطريقة عشوائية ثلاث مرات متتالية . احسب احتمال أن وتكون الكرات الثلاث المسحوبة من النوع الاحمر والازرق والاخضر على الترتيب ذلك بفرض :

أولاً : أن الكرة التي تسحب من الصندوق ترد قبل السحب التالي .

ثانياً : أن الكرة التي تسحب من الصندوق لا ترد .

٤ - ألقيت برميتين من زمرات الرد ثلاث مرات متتابعة على سطح أملس . أوجد احتمال الحصول على مجموع ٩

أولاً : مرة واحدة فقط .

ثانياً : مرة على الأقل .

ثالثاً : مرتين على الأكثر .

٥ - ١٦ ب شخصان احتمال وفاتها خلال ١٠ سنوات يساوي $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ على الترتيب - أوجد الاحتمالات الآتية :

(١) أن يموت ١٦ ب قبل نهاية العشر سنوات.

(ب) أن يعيش الإثنين حتى نهاية العشر سنوات .

(ج) أن يعيش واحد على الأقل حتى نهاية العشر سنوات .

(د) أن يموت واحد على الأقل قبل نهاية العشر سنوات .

٦ - مجموعة كاملة من أوراق اللعب (٥٢ ورقة) سحبنا منها ٢ ورقات مرة واحدة . أوجد احتمال أن تكون الأوزان المسحوبة تحمل الأرقام ٨ ٦ ٩ ٦ ١٠

٧ - في القرن السابق أوجد الاحتمال بفرض أننا سحبنا ورقة واحدة ثلاث مرات متتالية دون رد الورقة المسحوبة .

٨ - مجموعة من أوراق اللعب عددها ١٦ ورقة عبارة عن ٤ أولاد ٦ ٤ بنات ٦ ٤ رجال ٦ ٤ عشرات . تم توزيعها بطريقة عشوائية بين اللاعبين ١٦ ب - وجد احتمال حصول اللاعب ١ على الأربعة أولاد .

٩ - آلة تنتج سلعة معينة وتبلغ نسبة الوحدات التالفة ١٠٪ من الإنتاج . أخذنا خمسة وحدات بطريقة عشوائية أوجد الاحتمالات الآتية :

(١) أن يكون منها ٣ وحدات تالفة تماماً .

(ب) أن يكون منها ٣ وحدات تالفة على الأقل .

(ج) ألا يكون بها أى وحدات تالفة .

(د) أن تكون كلها تالفة .

١٠ - كيس به ٥ كرات سحبنا منه بطريقة عشوائية كرة أو أكثر أوجد احتمال أن يكون عدد الكرات المسحوبة فردياً .

إرشاد :

عدد الطرق التي يمكن بها سحب كرة أو أكثر

$$= {}^6P_1 - {}^6P_0 = 21 \text{ طريقة}$$

عدد الطرق التي تحقق الرغبة

= حالة سحب كرة أو ثلاث كرات أو ٥ كرات

$$= {}^6P_0 + {}^6P_3 + {}^6P_5$$

$$= 1 + 10 + 6 = 17$$

$$\frac{17}{21} = \text{والاحتمال المطلوب}$$

القيمة المتوقعة

Expected Value

مقدمة :

من السهل على الانسان أن يتخذ ما يشاء من القرارات في ظل أمور واضحة ومؤكدّة — ففند شراء سلعة متقاتلة فإنه يبحث عن أرخص المصادر لشراء هذه السلعة وهو يقارن بين التكاليف ويختار المصدر الذي يمكنه من الحصول على السلعة بأقل تكلفة ممكنة

ولكن عندما تصبح أمام حالة من عدم التأكد ، فإننا نتخذ القرارات على ضوء توقعاتنا للتأخر وبالتالي على ضوء القيم المختلفة للتوقعات المختلفة

والقيمة المتوقعة لأي حدث

= قيمة العائد من تحقق هذا الحدث \times احتمال حدوث هذا الحدث

فإذا الشخص الذي يلعب لكسب رهان معين فإن القيمة المتوقعة لهذا الحدث (كسب الرهان)

= قيمة الرهان \times احتمال الفوز به

المتوقعة يمكن استخدامها في بعض التطبيقات التجارية الحصول على ربح وذلك بحساب القيمة المتوقعة المختلفة لإختيار أعلى هذه القيم كما هو واضح بالمثال الآتي :

تاجر يبيع سلعة معينة ، ويربح في كل وحدة يبيعها ١٠ قروش ويخسر في كل وحدة لا يستطيع بيعها ٥ قروش

(أما نتيجة لأن السلعة قابلة للتلف أو لأي سبب آخر)

ويريد أن يحدد الكمية الواجب تخزينها من هذه السلعة للحصول على أكبر قيمة متوقعة ممكنة. ويرجوه إلى خبرات الماضي تدبّر له أن أرقام مبيعاته كانت كما يلي وذلك عن ١٠٠ يوم

رقم المبيعات	التكرار
٢٠٠ وحدة	٥٠ يوما
٣٠٠	٣٠
٤٠٠	٢٠
٥٠٠	صفر

الحل

أولا : تكوين جدول احتمالات

واضح أن الأيام موضوع الدراسة كانت ١٠٠ يوم وأنه خلال ٥٠ يوما كان يبيع ٢٠٠ وحدة وعلى ذلك فاحتمال أن يبيع ٢٠٠ وحدة في أي يوم من الأيام

$$\frac{1}{2} = \frac{50}{100} =$$

$$\text{واحتمال أن يبيع } 300 \text{ وحدة} = \frac{30}{100} = 0.3$$

$$\text{واحتما ليه } 400 \text{ وحدة} = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$\text{وأما احتمال أن يبيع } 500 \text{ وحدة} = \text{صفر}$$

وعلى ضوء هذا يمكن قياس القيمة المتوقعة البدائل المختلفة المعروضة أمامه

أولا : إذا قرر التاجر أن يخزن ٢٠٠ وحدة فإن القيمة المتوقعة يمكن حسابها كما يلي :

$$\text{في حالة بيع } 200 \text{ وحدة فلا يكون الربح الكلي المتوقع} \\ = 200 \times 10 \times \frac{1}{2} = 1000 \text{ قرش}$$

حيث أن ربح الوحدة الواحدة = ١٠ قروش

واحتال أن يبيع ٢٠٠ وحدة = $\frac{1}{4}$

ولكن من المحتمل أيضاً وبنسبة ٣، أن يطلب ٣٠٠ وحدة ويكون الربح المتوقع

$$٢٠٠ \times ١٠ \times ٣ = ٦٠٠ \text{ قرش}$$

وبلاحظ هنا أننا حريصاً ٢٠٠ وليس ٣٠٠ لا يمكن للتاجر أن يبيع

أكثر من الكمية التي قرر تخزينها

ومن الممكن أيضاً وهم أنه قام بتخزين ٢٠٠ وحدة فقط أن يطلب منه شراء

٤٠٠ وحدة باحتمال ٢، ولكنه في هذه الحالة لن يبيع سوى ٢٠٠ وحدة ويكون

$$\text{قيمة الربح المتوقع} = ٢٠٠ \times ١٠ \times ٢ = ٤٠٠ \text{ قرش}$$

وعلى هذا يكون قيمة الربح المتوقع في حالة تخزين ٢٠٠ وحدة

$$= (٢٠٠ \times ١٠ \times ٣) + (٢٠٠ \times ١٠ \times ٢) + (٤٠٠ \times ١٠ \times ١) =$$

$$٦٠٠ + ٤٠٠ + ١٠٠ = ١٠٠٠ \text{ قرش}$$

وبالمثل يمكن حساب قيمة الربح المتوقع في حالة تخزين ٣٠٠ وحدة على

الوجه التالي :-

١ - إذا طلب ٢٠٠ وحدة فقط يربح ١٠×٢٠٠ ويخسر ٥×١٠٠

$$\text{والقيمة المتوقعة لهذا الربح} = ٥ (٢٠٠ - ١٠٠) = ٥٠ \text{ قرشاً}$$

٢ - إذا طلب ٣٠٠ وحدة يربح ١٠×٣٠٠

$$\text{والقيمة المتوقعة لهذا الربح} = ٣ (٣٠٠ - ٢٠٠) = ٩٠٠ \text{ قرشاً}$$

٣ - إذا طلب ٤٠٠ وحدة فإنه يبيع ٣٠٠ وحدة الموجودة عندئذ والربح المتوقع

$$= ٣٠٠ \times ١٠ \times ٢ = ٦٠٠ \text{ قرشاً}$$

ويكون الربح المتوقع في حالة تخزين ٢٠٠ وحدة

$$= ٦٠٠ + ٩٠٠ + ٧٥٠ = ٢٢٥٠ \text{ قرشاً}$$

كما يمكن حساب قيمة الربح المتوقع في حالة تخزين ٤٠٠ وحدة فتجد :-

$$= ٢٠٠٠ \text{ قرشاً}$$

كما يمكن حساب الربح المتوقعة في حالة تعريض ٥٠٠ وحدة فنجد $= ١٥٥٠$
 وهذا يكون أكبر قيمة متوقعة للربح $= ٢٢٥٠$ عندما يكون المخزون $= ٣٠٠$ وحدة
 ويمكن تلخيص هذه النتائج في الجدول الآتي :

البيانات المتعلقة للمخزون للمخبر				المطلوب	
عدد	إحتمال	٢٠٠ وحدة	٣٠٠ وحدة	٤٠٠ وحدة	٥٠٠ وحدة
٢٠٠	١٥	١٠٠٠	٧٥٠	٥٠٠	٢٥٠
٣٠٠	٣٢	٢٠٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠	٥٠٠
٤٠٠	٣٢	٣٠٠٠	٢٠٠٠	٢٥٠٠	٧٠٠
٥٠٠	١٥	٢٠٠٠	٣٠٠٠	٤٠٠٠	٣٥٠٠
٥٠٠	صفر	٢٠٠٠	٣٠٠٠	صفر	صفر
القيمة المتوقعة		٢٢٥٠	٢٢٥٠	٢٢٥٠	٢٢٥٠

وبلاحظ من الجدول السابق أن القيمة المتوقعة للربح والقيمة العليا
 تمثل القيمة المتوقعة لصالح الربح أي بعد ضرب صافي الربح \times إحتمال الحصول عليه

ملخص لأهم مبادئ نظرية الاحتمالات

مع أمثلة محلولة للإيضاح

(١) الفئة الشاملة هي الفئة التي تشمل جميع العناصر الناشئة عن

إجراء تجربة معينة وتسمى فئة فضاء العينة Sample Space ويرمز لها بالرمز Ω

وإحتمال ونوع الحادث أ ويعبر عنه بالرمز ح (أ) = عدد عناصر الفئة أ

مقسوما على عدد عناصر الفئة الشاملة حيث $(أ) \leq \text{الصفر}$

، ح (أ) \geq من الواحد الصحيح

ونعبر عن ذلك بالقول صفر \geq ح (أ) ≥ ١

وكذلك ح (Ω) = ١

(٢) يقال للحدثين أ ، ب أنهما مانعان أو طاردان إذا كان وقوع

أحدهما يمنع وقوع الآخر « Mutually exclusive »

فمثلا إذا ألقينا بزهرة طاولة لا يمكن الحصول على رقم ٥ ، ٦ في

نفس الوقت وإذا ألقينا بعمله لا يمكن الحصول على صورته وكتابة في

نفس الوقت ولذلك فإن احتمال حدوث الحدثين المانعين = صفر أي أن ح

(أ ∩ ب) = صفر

وإذا كان الحدثان أ ، ب مانعين فإن ح (أ ∪ ب) = ح (أ) + ح (ب) .

(٣) إذا كانت \emptyset هي الفئة الخالية أي التي لا يوجد بها عناصر فإن:

$$ح(\emptyset) = \text{صفر}$$

(٤) إذا كان الحدث A هو الحدث المكمل للحدث A فإن $ح(A)$

$$= 1 - ح(A)$$

فمثلا عند القاء زهرة طاولة واحدة فإن الفئة الشاملة = $\{1, 2, 3, \dots\}$

$$\{4, 5, 6, \dots\}$$

الحدث A هو الحصول على رقم يقل عن ٥

$$\frac{4}{6} = ح(A) = \{1, 2, 3, 4\}$$

الحدث المكمل A' = باقى عناصر الفئة الشاملة = $\{5, 6, \dots\}$

$$ح(A') = 1 - ح(A) = \frac{2}{6}$$

وعموما للتذكير $ح(A \cup B)$ معناه احتمال حدوث A أو B أوهما

معاً $ح(A \cap B)$ احتمال حدوث A ، B معاً ، $ح(A)$ هو احتمال عدم حدوث A

لان معناه الحدث الذي يقع إذا لم يحدث A

٥- قاعدة عامه

إحتمال حدوث أحد الحادثين A أو B أو كلاهما

$$ح(A \cup B) = ح(A) + ح(B) - ح(A \cap B)$$

احتمال حدوث الأول + احتمال حدوث الثاني - احتمال حدوث الحادثين معاً

وذلك إذا كان A ، B متنافرين فإن $ح(A \cap B) = \text{صفر}$

وكذلك $ح (أ \cup ب) = ح (أ) + ح (ب)$

لأنه في بعض الأحيان لا تكون العلاقة بين $أ$ و $ب$ علاقة تنافر فإن - بل قد يكون هناك مشاركة بصورة جزئية وذلك إذا كان الحدث $أ$ هو الحصول على ورقة حمراء من مجموعة كاملة من أوراق اللعب (كالتشبه) والحدث $ب$ هو الحصول على ولد

ما هي العلاقة بين الحدثين $أ$ و $ب$ ؟



الحدث $أ$ يتقسم إلى

$أ / ب$ ، $أ \cap ب$

$$ح (أ) = ح (أ \cap ب) + ح (أ / ب)$$

احتمال الحصول على ولد أحمر = $ح (أ) + ح (ب) - ح (أ \cap ب)$

$$\frac{78}{97} = \frac{7}{97} - \frac{4}{97} + \frac{76}{97} =$$

(٦) الاحتمالات الشرطية

$أ$ ، $ب$ حدثان ، $ح (ب) < صفر$

$$ح (أ / ب) = \text{إحتمال حدوث الحدث } أ \text{ بفرض أن الحدث } ب \text{ قد وقع} = \frac{ح (أ \cap ب)}{ح (ب)}$$

مثال

ألقيت بزمرة طاولة وعرفت أن الحدث $ب$ قد وقع وهو الحصول على رقم فردي ما إحتمال حدوث الحدث $أ$ وهو الحصول على رقم ٥

حيث أن الحدث $أ$ هو الحصول على رقم ٥ بفرض أننا عرفنا أن الحدث $ب$ قد وقع وهو الحصول على رقم فردي أي $\{ ١ \text{ أو } ٣ \text{ أو } ٥ \}$

$$\frac{1}{3}$$

والطريقة أخرى : \therefore ح ($A \cap B$) — الحصول على رقم فردى ، $\frac{1}{4} = 0.25$

$$\text{ح (ب) الحصول على رقم فردى} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{4} \div \frac{1}{1} = \frac{(A \cap B)}{B}$$

وهي نفس النتيجة الى وصلنا لها سابقا

$$\therefore \text{ح (A / B)} = \frac{(A \cap B)}{B}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{|A \cap B|}{|B|} =$$

(٧) الاحداث المستقلة Independent

يقال للحدث أ بأنه مستقل عن الحدث ب إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر

في وقوع الآخر

في هذه الحالة نجد أن احتمال وقوع أ بفرض أن ب قد وقع = تماما

احتمال ونوع أ

$$\text{أى أن ح (A / B)} = \text{ح (A)}$$

$$\text{احتمال حدوث الحثين معا} = \text{ح (A \cap B)}$$

$$= \text{ح (A)} \times \text{ح (B)}$$

وهي قاعدة عامه ،هما تعدت الاحداث

(٨) الاحداث المرتبطة Dependent

احتمال وقوع حدثين أ ، ب

$$ح (أ) \text{ يؤثر في } ح (ب)$$

$$ح (أ \cap ب) = ح (أ) \times ح (ب) \text{ — نفرض أن أ قد وقع}$$

$$ح (أ) \times ح (ب/أ) =$$

أو تساوى ح (ب) \times ح (أ) بفرض أن ب قد وقع وعموما يمكن القول

$$\text{بيان } ح (أ \cap ب) = ح (أ/ب) \times ح (ب) = ح (ب/أ) \times ح (أ)$$

فإذا كان الحدثان مستقلين فإن $ح (أ \cap ب) = ح (أ) \times ح (ب)$ لأن $ح (أ/ب) = ح (أ)$ وكذلك $ح (ب/أ) = ح (ب)$ عندما يكون الحدثان أ ، ب مستقلين عن بعضهما البعض وعموما فإن القاعدة هنا هى قاعدة الضرب كل ما هناك هو مراعاة الارتباط إن وجد بين الحدثين أ ، ب فمثلا إذا كان هناك صندوق به ١٠ وحدات من بينها ٢ وحدات تالفة وسحينا وحدتين على التتابع نون رد فاحتمال أن تكون الوحدتان تالفتين $= ح (أ) \times ح (ب) =$ احتمال السحب فى المرة الأولى $\times ح (ب/أ) =$ احتمال المسحب فى المرة الثانية بفرض أن الحدث قد وقع فى المرة الأولى

$$\frac{1}{90} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{10} =$$

وأما لو أرجعنا الوحدة المسحوبة فى المرة الأولى قبل السحب فى المرة

$$\text{الثانية لكان الاحتمال} = \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$$

قاعدة هامة : يعتبر الحدث أ مستقلا عن الحدث ب إذا كان :

$$ح (أ \cap ب) = ح (أ) \times ح (ب) \text{ وإذا كان الحدثان مرتبطين أى غير مستقلين}$$

عن بعضهما البعض .

مثال ذلك صندوق به ٢ وحدات من منتج معين ولدينا الحدث (أ)

الصندوق به وحدات سليمة ومعطوبة والحدث ب الصندوق به وحدة واحدة على الأكثر معطوبة

فضاء العينة $\Omega = \{ \text{س س س ، س س م ، س م س ، م س س ، م س م ، م م س ، م م م} \}$

الفئة أ = $\{ \text{س م م ، س م م ، س م م ، م م س ، م م س ، م س م ، م س م ، م س س} \}$

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = (1) \text{ ح}$$

الفئة ب = $\{ \text{س س س ، م س س ، س س م ، س م س ، م س س ، م س م ، م م س ، م م م} \}$ ح (ب) = $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$$\frac{2}{8} = (1 \cap \text{ب}) \text{ ح} , \quad \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{4} = (1) \text{ ح} \times (ب)$$

∴ أ ، ب حدثان مستقلان .

(٨) نظرية بييز Baye's Formula

مصنع به ثلاثة خطوط إنتاج ، الأول أ والثاني ب والثالث جـ

الانتاج = ٦٠٠ وحدة ، ٣٠٠ وحدة ، ١٠٠ وحدة على الترتيب

الوحدات المعطوية = ١٢ وحدة ، ٩ وحدات ، ٥ وحدات على الترتيب

من الواضح أن إجمالي انتاج المصنع = ١٠٠٠ وحدة

وعند الوحدات التالفة = ٢٦ وحدة

وإحتمال أن تكون الوحدة تالفة من إنتاج المصنع كله = ٢,٦ %

يمكن إعداد الجدول التالي :-

(١) العنابر	(٢) كمية الإنتاج	(٣) احتمال الإنتاج للعنابر الثلاثة	(٤) احتمال العطب من إنتاج كل عنبر على حدا	(٥) احتمال أن تكون من إنتاج العنبر ومعطوبه (٢) × (٣)
أ	٦٠٠	,٦٠	,٠٢	٠,٠١٢٠
ب	٢٠٠	,٢٠	,٠٢	٠,٠٠٩٠
ج	١٠٠	,١٠	,٠٥	٠,٠٠٥٠
				<hr/>
				٠,٠٢٦٠

وهنا يمكن الحصول على الاحتمالات السابقة واللاحقة كما يلي :-

ح (أ / ب) احتمال أن تكون الوحدة تالفه بفرض أنها من إنتاج العنبر أ = ٠,٢ وهو احتمال شرطي

إحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر أ = ٠,٦

إحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر أ وتالفه = ح (أ) × ح (أ / ب)

$$٠,٠١٢ = ٠,٠٢ \times ٠,٦ =$$

إحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر ب = ٠,٢

إحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر ب وتالفه

$$٠,٠٠٩ = ٠,٠٢ \times ٠,٢٠ =$$

وكذلك احتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر ج = ٠,١

وإحتمال أن تكون الوحدة من إنتاج العنبر (ج) وتالفه

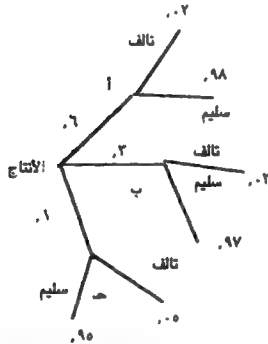
$$,005 = ,05 \times ,1 =$$

وعلى ذلك احتمال أن نكون تالفه إذا تم أخذها من إنتاج المصنع كـ
بطريقة عشوائية

$$ح \times (أ) \times (أ/ت) + ح \times (ب) \times (ب/ت) + ح \times (ج) \times (ج/ت) =$$

$$,026 = ,05 \times ,1 + ,02 \times ,2 + ,02 \times ,6 =$$

ويمكن تمثيل ذلك بالشجرة التالية



والآن نسال عن احتمال آخر وهو الإحتمال اللاحق لوقوع الحدث Posteriori

بفرض أنك أخذت وحدة من إنتاج المصنع ووجدتها تالفه . ما احتمال أن
تكون من إنتاج العنبر أ ، ب ، ج .

الأمر هنا يتوقف على مساهمة كل عنبر في - من الجدول السابق من
الواضح من العمود رقم (5) فإن احتمال التلف على مستوى المصنع كـ

$$,026 =$$

وأن العنبر أ ساهم بمقدار ٠,١٢ , والعنبر ب بمقدار ٠,٠٠٩ , والعنبر ح بمقدار ٠,٠٠٥

وعلى ذلك يمكن أن نقول :

بفرض أن الوحدة وجدت تالفه فإحتمال أن تكون من العنابر الثلاثة هي

$$ح (أ/ت) = \frac{٠,١٢}{٠,٣٦} = ٠,٤٦$$

$$ح (ب/ت) = \frac{٠,٠٠٩}{٠,٣٦} = ٠,٢٥$$

$$ح (ح/ت) = \frac{٠,٠٠٥}{٠,٣٦} = \frac{٠,١٩}{١}$$

وعلى ذلك يمكن إستنتاج القانون الآتى :-

$$ح (أ/ت) = \frac{ح (أ) \times ح (ت/أ)}{ح (أ) \times ح (ت/أ) + ح (ب) \times ح (ت/ب) + ح (ح) \times ح (ت/ح)}$$

$$ح (ب/ت) = \frac{ح (ب) \times ح (ت/ب)}{\text{نفس المقام}}$$

$$ح (ح/ت) = \frac{ح (ح) \times ح (ت/ح)}{\text{نفس المقام}}$$

أمثلة محلولة على الاحتمالات

سؤال (١)

ثلاثة صناديق أ ، ب ، ج بها ١٠ وحدات ، ٦ وحدات ، ٤ وحدات على الترتيب ويبلغ عدد الوحدات التالفه بها ٢ وحدات ، وحدتين ووحدة واحدة .

فإذا كانت فرص السحب من أى صندوق واحدة وأننا سحبنا وحدة واحدة بطريقة عشوائية من أحد هذه الصناديق ، ما احتمال أن تكون الوحدة تالفه وما احتمال أن تكون سليمة .

الحل

إحتمال السحب من أى صندوق = $\frac{1}{3}$

إحتمال التلف من الصندوق الأول = ٢ .

والثانى $\frac{1}{3}$ والثالث $\frac{1}{4}$

إحتمال أن تكون الوحدة تالفه

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{10} \times \frac{1}{3} =$$

$$\frac{52}{180} = \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{2}{90} =$$

إحتمال أن تكون الوحدة سليمة

$$\frac{127}{180} = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{3} =$$

وهى تساوى بطريقة الاستبعاد

$$\frac{127}{180} = \frac{52}{180} - 1$$

مثال (٢)

في المثال السابق بفرض أن الوحدة التي سُحبت بطريقة عشوائية
وَجُدَّتْ تالفه ما إحتمال أن تكون من إنتاج كل من الصندوق الأول ١
والصندوق ب والصندوق جـ

الاحتمال المطلوب = ح (أ/ت)

$$\frac{(1/ت) \times (١) \times (١/٥)}{(١/ت) \times (١) \times (١/٥) + (١/ب) \times (١) \times (١/٥) + (١/ج) \times (١) \times (١/٥)} = ح (أ/ت)$$

$$\frac{١٨}{٥٢} = \frac{٠,٢ \times \frac{١}{٢}}{١٨٠ + ٥٢} =$$

$$\frac{٢٠}{٥٢} = \frac{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}{١٨٠ + ٥٢} = ح (ب/ت)$$

$$\frac{١٥}{٥٢} = \frac{\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}}{١٨٠ + ٥٢} = ح (ج/ت)$$

وبلاحظ أن مجموع الإحتمالات = واحد صحيح لأن الوحدة التالفه يمكن
أن تكون من الصندوق أ أو ب أو جـ

مثال (٣)

أحمد وعمرو وعادل يتنافسون لكسب مباراة فإذا كانت فرصه أحمد
ضعف فرصة عمرو وفرصة عمرو ثلاثة أمثال فرصة عادل ما إحتمال فوز كل
منهم بالمباراة

نفرض أن إحتمال فوز عادل = س

∴ إحتمال فوز عمرو = ٣ س

إحتمال فوز أحمد = ٦ س

∴ س + ٢س + ٦س = ١ صحيح

وهو مجموع الإحتمالات ١٠س = ١

ومنها س = ١/١٠

احتمال فوز أحمد = ٦/١٠

إحتمال فوز عمرو = ٢/١٠

إحتمال فوز عادل = ١/١٠

سؤال (٤)

إذا كان إحتمال نجاح حسين = $\frac{2}{5}$

واحتمال نجاح على = $\frac{7}{11}$

أرجو الاحتمالات الآتية :-

(١) إحتمال نجاح الاثنين

(٢) إحتمال رسوب الاثنين

(٣) إحتمال نجاح واحد على الأقل

$$(١) \text{ إحتمال نجاح الإثنين } = \frac{2}{5} \times \frac{7}{11} = \frac{14}{55}$$

$$(٢) \text{ إحتمال رسوب الاثنين } = \frac{2}{5} \times \frac{4}{11} = \frac{8}{55}$$

(٣) إحتمال نجاح واحد على الأقل

$$= ١ - \text{إحتمال رسوب الاثنين}$$

$$= ١ - \frac{8}{55} = \frac{47}{55}$$

وهذا الاحتمال الأخير

= احتمال نجاح حسين ورسوب على + احتمال نجاح على ورسوب
حسين + احتمال نجاح الاثنين

$$\frac{7}{11} \times \frac{2}{8} + \frac{7}{8} \times \frac{7}{11} + \frac{2}{11} \times \frac{2}{8} =$$

$$\frac{14}{88} = \frac{71}{88} + \frac{14}{88} + \frac{4}{88}$$

= وهذا الاحتمال أيضا

احتمال حدوث أحد حادثين أو كلاهما

= احتمال حدوث الأول + احتمال حدوث الثانى - احتمال حدوث الاثنين

معا

$$\frac{14}{88} = \frac{7}{11} \times \frac{2}{8} - \frac{7}{11} + \frac{2}{8} =$$

مثال (5) :

ألقيت بزهرتين من زهرات الطاولة وطلعت أن المجموع أقل من ٩
ما احتمال أن يكون المجموع رقما فرديا.

بفرض أن ح (ب) احتمال أن يكون المجموع أقل من ٩

المجموع ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨

عدد الحالات ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٥ = ٢٦ حالة

$$ح(ب) = \frac{n}{N}$$

ح (أ ∩ ب) معناه احتمال أن يكون المجموع فرديا وأقل من ٩

المجموع ٧ ٥ ٣

عدد الحالات ١٢ = ٦ + ٤ + ٢ حاله

$$\frac{12}{n} = (A \cap B) C$$

$$\frac{(A \cap B) C}{(B) C} = C(A/B)$$

$$\frac{12}{n} \div \frac{12}{n} =$$

$$\frac{6}{12} = \frac{12}{n} = \frac{12}{n} \times \frac{12}{12} =$$

ويمكن الوصول إلى هذا الحل عن طريق قضاء العينة المخفضة - حيث
أننا علمنا أن المجموع أقل من ٩ . ∴ عدد الحالات = ٢٦ حاله

عدد الحالات التي تحقق الرغبة (عدد حالات المجموع الفردي) = ١٢
حاله

الاحتمال المطلوب = $\frac{12}{n} = \frac{6}{12}$ وهي نفس النتيجة التي وصلنا
لها سابقا .

مثال (٦)

يوجد بكلية الإدارة ٥٠٠ طالب ٣٠٠ نكور ، ٢٠٠ إناث عدد الطلبة
المصريين ٤٠٠ والإجانب ١٠٠ (٢٠٠ إناث ، ٨٠ نكور) فإذا كانت الأحداث
كما يلي :

الحدث (أ) مصري الجنسية ، الحدث (ب) أجنبي

الحدث (ج) نكور ، الحدث (د) إناث

أوجد الإحتمالات الآتية :

$$\begin{aligned} & \text{ح (أ) ، ح (ب) ، ح (ج) ، ح (د)} \\ & \text{ح (ج/أ) ، ح (أ ∩ ب) ،} \\ & \text{ح (أ-ج) ،} \end{aligned}$$

مع إيضاح العلاقات

الحل

$$\begin{aligned} & \text{ح (أ) إحتمال أن يكون مصرياً} = \frac{4}{10} = 0.4 \\ & \text{ح (ب) إحتمال أن يكون أجنبياً} = \frac{6}{10} = 0.6 \end{aligned}$$

وهذان الحدثان متنافران

ح (ج) إحتمال أن يكون ذكراً ، ح (د) إحتمال أن يكون أنثى وهما حدثان متنافران $= \frac{2}{10}$ ، $\frac{2}{10}$ أى ٢ ، ٤ ، على الترتيب

ح (ج / أ) وهو الإحتمال الشرطى بأن يكون ذكراً بفرض أنك عرفت أنه مصرى الجنسية

عدد الذكور من المصريين = ٢٠٠ ذكر - ٨٠ ذكر أجنبياً = ٢٢٠

$$\begin{aligned} & \text{ح (ج/أ)} = \frac{\text{ح(ج ∩ أ)}}{\text{ح(أ)}} = \frac{2}{4} = 0.5 \\ & = 0.5 = 0.4 \div \frac{2}{10} = \end{aligned}$$

ويمكن الوصول لنفس النتيجة كما يلى :-

الاحتمال المطلوب هو الاحتمال الشرطى بأن يكون ذكراً بفرض أنك

عرفت أنه مصرى

عدد الطلبة من المصريين = ٤٠٠

عدد الذكور من المصريين = ٢٢٠

الاحتمال = $\frac{٢٢٠}{٤٠٠} = ٥٥\%$, وهى نفس النتيجة التى وصلنا لها .

ح (أ ∩ ب) = احتمال أن يكون مصرياً وأجنبياً = صفر لأن الحدثين متنافران.

ح (أ ∩ ب) وهو احتمال أن يكون مصرياً وذكر

$$= \frac{\text{عدد المصريين الذكور}}{\text{إجمالي عدد الطلبة (عدد عناصر الفئة الشاملة)}} = \frac{٢٢٠}{٤٠٠} =$$

مثال (٧)

إذا كان احتمال رسوب الطالب فى الرياضة = ٣٠ , وفى المحاسبة ٢٥ , وفى المحاسبة والرياضة معا ١٠ , إختارنا طالبا بطريقة عشوائية ووجد راسبا فى المحاسبة ما احتمال أن تكون راسبا فى الرياضة أيضا .

الحل

ح (أ) = احتمال الرسوب فى الرياضيات = ٣٠ ,

ح (ب) = احتمال الرسوب فى المحاسبة = ٢٥ ,

الاحتمال الشرطى لأن يكون راسبا فى الرياضية بفرض أنه وُجد راسبا فى المحاسبة

$$= \frac{ح (أ ∩ ب)}{ح (ب)} = ح (أ / ب) = \frac{١٠}{٢٥} = ٤٠\%$$

(A) مثال

كيس به ٢ كرات حمراء تحمل الأرقام ١ ، ٢ ، ٢ و ٢ كرات بيضاء تحمل الأرقام ١ ، ٢ ، ٢ أيضا - سحبنا كرتين بطريقة عشوائية أوجد الاحتمالات الآتية :-

(١) أن تكون أحدهما حمراء والأخرى بيضاء

(٢) أن تكون إحدهما حمراء والأخرى بيضاء ولكن يحملان نفس الرقم

الحل :

(١) عدد طرق سحب كرتين من ٦ كرات بصفه عامه $= ٦ ق ٢ = ١٥$
ويمثل عدد مفردات الفئة الشامله فئه فضاء ، العينة مقام الاحتمال
عدد طرق سحب كرة حمراء وكرة بيضاء $= ٢ ق ١ \times ٢ ق ١ = ٩$

$$\frac{٢}{١٥} = \frac{٩}{١٥} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

(٢) يوجد ٢ أزواج من الكرات البيضاء والحمراء وتحمل نفس الرقم

(١) أحمر ، (١) أبيض

(٢) أحمر ، (٢) أبيض

(٣) أحمر (٣) أبيض

عدد طرق سحب زوج من ثلاثة أزواج $= ٢ ق ٢ = ٢$

$$\frac{١}{١٥} = \frac{٢}{١٥} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

مثال (٩)

أحمد ومحمود وعلى من النادي الأهلي وحسين وعمرو ومصطفى من نادي الزمالك يتنافسون على الفوز ببطولة تنس الطاولة فإذا كانت فرصة أحمد ضعف فرصة محمود وثلاثة أمثال فرصة على وتساوى فرصة حسين وثلاثة أمثال فرصة كل من محمود ومصطفى

ما احتمال فوز لاعب من الأهلي بالبطولة وما احتمال فوز أحمد بالبطولة واحتمال فوز حسين بالبطولة .

الحل:

نفرض أن فرصة كل من على ، ومحمود ومصطفى = س

فرصة كل من أحمد وحسين = ٣ س

فرصة محمود = ١,٥ س

إجمالي الفرص = ٣ س + ١,٥ س + س + ٣ س + س + س = ١٠,٥ س

$$١ = ١٠,٥ س$$

$$س = \frac{١}{١٠,٥}$$

$$\frac{١١}{٢١} = \frac{٥,٥}{١٠,٥} = \text{احتمال فوز لاعب من الأهلي بالبطولة}$$

احتمال فوز أحمد = احتمال فوز حسين

$$\frac{١}{٢١} = \frac{٣}{١٠,٥} =$$

$$\frac{٣}{٢١} = \text{احتمال فوز أحمد}$$

$$\frac{٢}{٢١} = \text{احتمال فوز محمد}$$

مثال (١١)

ثلاثة صناديق بالصندوق الأول ٢٠ وحدة منها ٥ تالفه وبالصندوق الثاني ٣٠ وحدة منها ١٠ تالفه وبالثالث ٥٠ وحدة منها ٥ تالفه فإذا كانت فرض السحب من هذه الصناديق متكافئه وأنتا سحبنا وحدة واحدة بطريقة عشوائية . ما احتمال أن تكون تالفه .

الحل :

$$\frac{1}{3} = \text{احتمال السحب من أى صندوق}$$

احتمال أن تكون الوحدة تالفه $= \frac{1}{3}$ من الصندوق الأول ، $\frac{1}{3}$ من الثانى ، $\frac{1}{3}$ من الثالث

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$\frac{11}{18} =$$

مثال (١٢)

نفرض أننا سحبنا وحدة واحدة فى المثال السابق ووجدت تالفه ما احتمال أن تكون من الصندوق الثانى وما احتمال أن تكون الصندوق الثالث .

الحل :

$$\frac{11}{18} \div \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \text{الاحتمال}$$

$$\frac{20}{11} =$$

$$\frac{11}{18} \div \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \text{احتمال أن تكون من الصندوق الثالث}$$

$$= \frac{1}{11} \text{ ويدهى من الأول } \frac{10}{11} \text{ وتكون مجموع الاحتمالات = واحد}$$

صحيح

مثال (١٣)

شركة يعمل بها ١٥ سيدة ، ٣٠ رجل إختبرنا ١٠ أشخاص بطريقة عشوائية للسفر للخارج ما إحتمال أن يكون من بينهم سيدتان على الأقل إذا كان ٥ سيدات يرفضن السفر لظروفهن الخاصة .

$$\text{عدد العاملين} = ٣٠ + ١٥ = ٤٥$$

تستبعد ٥ سيدات

الباقى ٤٠ ١٠ سيدات ، ٣٠ رجل

الاحتمال المطلوب = ١ - (احتمال عدم اختيار أى سيدة + احتمال اختيار سيدة)

$$1 - \left[\frac{١٠ ق ٣٠ \times ١ ق ١٥}{١٠ ق ٤٠} + \frac{١٠ ق ٣٠ \times ١٠ ق ١٥}{١٠ ق ٤٠} \right]$$

مثال (١٤)

خمس ورقات من أوراق اللعب « الكوتشينه » تحمل الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ سحبنا ورقتين بطريقة عشوائية أوجد إحتمال الحصول على مجموع فردى فى الحالات الآتية :-

أ- حالة سحب الورقتين دفعه واحدة

ب- حالة سحب ورقة تلو الأخرى مع رد الورقة الأولى قبل السحب
الثانية

ج- حالة سحب ورقة وراء الأخرى دون الرد .

الحل :

(أ) فضاء العينة = ٥ ق ٣ = ١٠ وهو مقام الاحتمال

الفئة (١) = { ٥/٤ ، ٤/٣ ، ٥/٢ ، ٣/٢ ، ٤/١ ، ٢/١ }

عدد العناصر = ٦ والاحتمال = $\frac{6}{10}$

ب- يتحقق المطلوب إذا كان الرقم فى السحب الأولى فرديا وفى السحب الثانية زوجيا أو العكس أى فى المرة الأولى زوجيا والثانية فرديا .

فردي فى المرة الأولى = ١ ، ٢ ، ٥ أى ٣ حالات

زوجى فى المرة الثانية = ٢ ، ٤

عدد الحالات = $2 \times 3 = 6$ حالات

أو زوجى فى المرة الأولى ، فردي فى الثانية

 $6 = 3 \times 2$ مجموع الحالات التى تحقق الرغبة = $6 + 6 = 12$ فئة فضاء العينة = عدد حالات السحب فى المرة الأولى \times عدد حالات السحب فى المرة الثانية $20 = 5 \times 4 =$ الاحتمال = $\frac{12}{20}$ ج- فئة فضاء العينة تتكون من ٢٠ عنصر $20 = 4 \times 5$

إذا كان السحب الأولى عدد فرديا عدد الطرق = ٣ ويكون عدد طرق

سحب رقماً زوجياً المرة الثانية = ٢ وعدد الطرق = $2 \times 2 = 4$

إذا تم سحب رقماً زوجياً في المرة الأولى يتم ذلك بعدد من الطرق = ٢

ويتم سحب عدد فردي في المرة الثانية بعدد ٢ طرق لأن عدد الأوراق الباقية = ٤ ورقات منها ٢ فردية وورقة واحدة زوجية

عدد الطرق = $2 \times 2 = 4$

عدد الطرق الكلية = $4 + 4 = 8$

الاحتمال = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

الاحتمالات ١/٢ ، ١/٢ ، ١/٢ ، ١/٢ على الترتيب

سؤال (١٥)

إذا كان احتمال فوز النادي الأهلي في أى مباراة كرة قدم يلعبها =

٠.٧ ، واحتمال التعادل = ٠.٢٥ ، واحتمال الخساره = ٠.٠٥ - فإذا لعب النادي

أربع مباريات خلال الشهر أوجد الاحتمالات الآتية :-

(١) أن يفوز ٣ مباريات على الأقل ولا يخسر أى مباراة .

(٢) أن يفوز مرتين ويتعادل مرة ويخسر مرة

(٣) أن يتعادل مرتين على الأقل .

الحل :

(١) أن يفوز ٣ مباريات على الأقل ولا يخسر أية مباراة يتحقق ذلك إذا فاز في المباريات الأربعة إلى يلعبها أو إذا فاز في ٣ مباريات وتعادل في مباراة واحدة

$$أ- \text{إحتمال الفوز في أربعة مباريات} = {}^4(,٧) = ٢٤٠١,$$

$$ب- \text{إحتمال الفوز ٣ مرات وتعادل مره} = {}^4(,٧) {}^2(,٢٥) = ٢٤٣,$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = ٢٤٠١ + ٢٤٣٠ = ٥٨٣١,$$

(٢) يكسب مرتين ويتعادل مره ويخسر مره

لو كان الاحتمال هو على سبيل المثال الفوز في المرتين الأولى والثانية وتعادل في الثالثة والخسارة في الرابعة لكان الاحتمال .

$${}^2(,٧) {}^2(,٢٥) {}^1(,٥) = ٠٠٠٦١٢٥,$$

ولكن المطلوب هو الفوز في أى مرتين وتعادل في أى مره والخسارة في أى مرة وهذه الصورة تتكرر ١٢ مره

عدد طرق ترتيب أربعة أشياء منها ٢ متشابهه

[ف ، ف ، ت ، خ]

$$١٢ = \frac{٢ \times ٢ \times ٤}{٢} = \frac{٤ \cdot ٢}{٢} =$$

$$١٢ \times (٠,٧)^٢ \times (٠,٢٥)^١ \times (٠,٠٥)^١ = \text{الإحتمال}$$

$$٠,٠٦١٢٥ \times ١٢ = ٠,٧٣٥$$

(٣) احتمال أن يتعادل مرتين على الأقل

يتحقق الاحتمال في الحالات الآتية :-

(١) في حالة التعادل ٤ مرات

(٢) التعادل ٣ مرات والفوز مره أو التعادل ٢ مرات والخسارة مره .

(٣) التعادل مرتين والفوز مرتين أو التعادل مرتين والخسارة مرتين

أو التعادل مرتين مع الفوز مره والخسارة مره

$$١- \text{التعادل ٤ مرات } (٠,٢٥)^٤ = ٠,٠٣٩٠٦٢$$

$$٢- \text{احتمال التعادل ٣ مرات}$$

$$= \text{احتمال تعادل ٢ مرات} + \text{مرة فوز يحدث بعدد ٤ ق} = ٤ \text{ طرق}$$

$$+ \text{احتمال تعادل ٢ مرات} + \text{خسارة مره يحدث بعدد ٤ ق} = ٤ \text{ طرق}$$

$$,00 \times {}^2(,20) \text{ £} + ,7 \times {}^2(,20) \text{ £} =$$

$$,003120 + ,04370 =$$

$$,046870 =$$

٢- احتمال التعادل مرتين

التعادل مرتين و الفوز مرتين وعدد الحالات $\frac{1}{2 \times 2} = 6$ حالات

التعادل مرتين والخسارة مرتين وعدد الحالات $6 = 6$ حالات

التعادل مرتين والفوز مره والخسارة مره $= \frac{1}{2} = 12$ حاله

$$= {}^2(,20) {}^2(,7) + {}^2(,20) {}^2(,00) + 12 {}^2(,20) {}^2(,7) (,00)$$

$$= ,18370 + ,0009370 + ,02620 = ,2109370$$

الاحتمال المطلوب $= ,046870 + ,003120 + ,2109370$

$$= ,2617187$$

$= ,262$ لأقرب ثلاث أرقام عشريه .

حل آخر

يمكن حل التمرين السابق بطريقة الاستبعاد الاحتمال المطلوب

$$= ١ - (\text{إحتمال التعادل صفر مرة} + \text{احتمال التعادل مرة واحدة})$$

إحتمال التعادل صفر مرة

$$= \text{إحتمال التعادل صفر مرة} + \text{الفوز ٤ مرات} \quad \text{حالة واحدة}$$

$$\text{إحتمال التعادل صفر مرة} + ٣ \text{ مرات فوز} + \text{مرة خسارة} = ٤ \text{ حالات}$$

$$\text{احتمال التعادل صفر مرة} + ٢ \text{ فوز} + ٢ \text{ خسارة} = ٦ \text{ حالات}$$

$$\text{احتمال التعادل صفر مرة} + \text{الفوز مرة} + ٣ \text{ مرات خسارة} = ٤ \text{ حالات}$$

$$\text{احتمال التعادل صفر مرة} + \text{الخسارة ٤ مرات} = \text{حالة واحدة}$$

$$= {}^4(,٧) + {}^2(,٧) {}^2(,٥) + {}^2(,٧) {}^2(,٥) + {}^4(,٧)$$

$$+ {}^2(,٥) {}^2(,٥) + {}^4(,٧)$$

$$= ٢٤,٠٦ + ٠,٦٨٦ + ٠,٠٧٣٥ + ٠,٠٠٣٥ + ٠,٠٠٠٠٦٢ = ٠,٣١٦٠٥$$

إحتمال التعادل مرة واحدة

تعادل مرة وفوز ٣ مرات وخسارة صفر مرة ٤ حالات

تبادل مره وفوز مرتين وخسارة مرة ١٢ حالة

تبادل مرة وفوز مره وخسارة مرتين ١٢ حالة

تبادل مره وفوز صفر مرة وخسارة ٢ مرات ٤ حالات

مجموع الاحتمالات ٤ (٠,٢٥) (٠,٧) ٢ (٠,٥) ٢ (٠,٧) ١ (٠,٢٥) ١٢ + صفر (٠,٥) ٢ (٠,٥)

$$+ ١٢ (٠,٢٥) (٠,٧) (٠,٥) ٢ + ٤ (٠,٢٥) (٠,٧) صفر (٠,٥) ٢$$

$$= ٣٤٣ + ٠,٧٣٥ + ٠,٥٢٥ + ٠,٠٠١٢٥ = ٤٢١٨٧٥ ,$$

$$= ٣١٦٠٥٠ + ٤٢١٨٧٥ , ٧٣٨ = لأقرب ١٢ أرقام عشريه$$

الاحتمال المطلوب = ١ - ٧٣٨ , ٢٦٢ = نفس النتيجة السابقة ,

مثال (١٦)

إذا كان احتمال فوز عمرو في المرة الواحدة = $\frac{1}{8}$

وإحتمال فوز عادل = $\frac{1}{8}$ في المرة الواحدة

فإذا لعب كل منهما مرتين لتأديهما فما احتمال الفوز مرة واحدة على

الأقل

هنا يفضل الحل بطريقة الاستبعاد

لا يتحقق الاحتمال في حالة خسارة كل منهما في المرتين .

$$\text{إحتمال خسارة عمرو في المرة الواحدة} = \left(\frac{4}{9} \right)$$

$$\text{إحتمال خسارة عمرو في المرتين} = \left(\frac{4}{9} \right)^2$$

$$\text{وكذلك إحتمال خسارة عادل في المرتين} = \left(\frac{5}{8} \right)^2$$

$$\text{الاجمالى المطلوب} = 1 - \left(\frac{4}{9} \right)^2 \times \left(\frac{5}{8} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{784}{1600} = 1 - 0.49 = 0.51$$

حل مثال رقم ١٦ بطريقة التجميع

$$\text{إحتمالات النجاح} = \frac{1}{9} , \frac{1}{8} \text{ على الترتيب}$$

$$\text{احتمال النجاح في المرات الأربع} = \left(\frac{1}{9} \right)^2 \left(\frac{1}{8} \right)^2 = \frac{1}{1600}$$

إحتمال النجاح ٢ مرات — (تشمل مرة واحدة من المرات الأربع)

$$\frac{4}{1600} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9} =$$

$$\frac{4}{1600} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{9}$$

$$\frac{5}{1600} = \frac{1}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9}$$

$$\frac{22}{1600} = \frac{5}{8} \times \frac{1}{8} \times \frac{1}{9} \times \frac{1}{9}$$

إحتمال الفوز مرتين : (والفشل مرتين) = ٦ حالات

$$\frac{٤٩}{١٦٠٠} = \frac{٧}{٨} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٥} \times \frac{١}{٥} \quad (١)$$

$$\frac{٢٨}{١٦٠٠} = \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٨} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٥} \quad (٢)$$

$$\frac{٢٨}{١٦٠٠} = \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٥} \quad (٣)$$

$$\frac{٢٨}{١٦٠٠} = \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٥} \quad (٤)$$

$$\frac{٢٨}{١٦٠٠} = \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٥} \quad (٥)$$

$$\frac{١٧٧}{١٦٠٠} = \frac{١}{٨} \times \frac{١}{٨} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} \quad (٦)$$

احتمال الفوز مرة (الفشل ٣ مرات)

$$\frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٧}{٨} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٥} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٧}{٨} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{١}{٥}$$

$$\frac{٦١٦}{١٦٠٠} = \frac{١}{٨} \times \frac{٧}{٨} \times \frac{٤}{٥} \times \frac{٤}{٥} + \frac{٧}{٨} \times \frac{١}{٨} \times$$

$$\frac{٥١}{١٠٠} = \frac{٨١٦}{١٦٠٠} = \frac{٦١٦}{١٦٠٠} + \frac{١٧٧}{١٦٠٠} + \frac{٢٢}{١٦٠٠} + \frac{١}{١٦٠٠} = \text{الاحتمال}$$

وهي نفس النتيجة التي وصلنا لها سابقا

الفصل الثالث

التوزيعات الاحتمالية

الفصل الثالث

التوزيعات الاحتمالية

المتغير العشوائى :

عند إجراء أى تجربة فإن هذه التجربة قد تسفر عن نتائج مختلفة يمكن أن تسمى كل منها متغيرا عشوائيا فعند إلقاء زهرة طاولة فإنه من الممكن الحصول على الأرقام ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦ وعلى ذلك فالمتغير العشوائى الذى يمكن أن نرمز له بالرمز S يمكن أن تأخذ أحد هذه القيم . وعند إلقاء عمله يمكن أن نحصل على صورته أو كتابه والمتغير العشوائى يمكن أن يكون أن صورة أو كتابة وإذا دلت خبره العملية أن المبيعات اليومية لصاله عرض السيارات يمكن أن تتراوح بين صفر ، ٧ سيارات فإن المتغير العشوائى يمكن أن يأخذ أحد هذه القيم.

وإذ أردنا أن نستطلع رأى المستهلكين لسلعة معينة عن مستوى هذه السلعة فإن هذا المستوى يمكن أن نعطيه الأرقام التالية

٦	ممتاز
٥	جيد جدا
٤	جيد
٣	متوسط
٢	ردئ
١	ردئ جدا

والتغير العشوائى يمكن أن يسفر عن أحد هذه الأرقام والتغير العشوائى يمكن أن يكون محدوداً بمعنى أن يأخذ عدداً من القيم discrete vandam variable ويمكن أن يكون مستمراً يأخذ عدداً لانهائياً من القيم مثل الزمن اللازم لإنهاء خدمة معينه .

جدول التوزيعات الإحتماليه :

إذا قمنا بدراسة عن مبيعات السيارات خلال ١٠٠ يوم وكانت كما يلى :

المبيعات	عدد الايام
صفر	١٠
١	١٥
٢	٢٠
٣	٤٠
٤	١٠
٥	٥
<hr/>	
	١٠٠

فإنه من الممكن الوصول إلى متوسط عدد السيارات المباعة فى اليوم كما يلى:-

$$\frac{1}{100} (\text{صفر} \times 10 + 1 \times 15 + 2 \times 20 + 3 \times 40 + 4 \times 10 + 5 \times 5)$$

$$2.4 = \frac{240}{100} \text{ فى اليوم}$$

كما يمكن أن نحول هذه الخبرة العملية إلى جدول توزيع احتمالي والحصول على المتوسط كما يلي :-

المبيعات	عدد الأيام	ح (س)	ح (س) × س
صفر	١٠	١٠	صفر
١	١٥	١٥	١٥
٢	٢٠	٢٠	٤٠
٣	٤٠	٤٠	١٢٠
٤	١٠	١٠	٤٠
٥	٥	٥	٢٥
	<hr/>	<hr/>	<hr/>
	١٠٠	١	٢٠٤

سَ الوسط الحسابي للتوزيع الاجمالي = مج س × ح (س)

ويمكن حساب التباين والانحراف المعياري كما يلي :-

حيث التباين = مج (س - س)² × ح(س)

س	س-س	ح (س-س)²	ح (س-س)² × ح(س)	س	س-س	ح (س-س)²	ح (س-س)² × ح(س)
صفر	- ٢,٤	٥,٧٦	٥,٧٦	١٠	١٠	١٠٠	١٠٠
١	- ١,٤	١,٩٦	١,٩٦	١٥	١٥	٢٢٥	٣٣٨
٢	- ٠,٤	٠,١٦	٠,١٦	٢٠	٢٠	٤٠٠	٨٠٠
٣	٠,٦	٠,٣٦	٠,٣٦	٤٠	٤٠	١٦٠٠	٦٤٠٠
٤	١,٦	٢,٥٦	٢,٥٦	١٠	١٠	١٠٠	١٠٠
٥	٢,٦	٦,٧٦	٦,٧٦	٥	٥	٢٥	١٢٥

١,٦٤.

١,٦٤ = التباين

الانحراف المعياري = الجذر التربيعي للتباين = ١,٢٨

أنواع التوزيعات الاحتمالية

سبق أن أوضحنا أن المتغير العشوائى ما هو إلى الوصف الرقمى للنتائج التى يمكن أن تسفر عنها أى تجربة سواء كانت تجربته بسيطة مثل ألقاء زهرة طاوله (الحصول على أحد الأرقام من ١ إلى ٦) أو ألقاء قطعة نقود (الحصول على صوره أو كتابه) وحتى هذه التجربة البسيطة يمكن تحويلها إلى أرقام بأن نفرض أن الصورة تأخذ رقم ١ والكتاب رقم ٢ - وهذا المتغير العشوائى قد يكون discrete منفصلاً إذا كان يأخذ رقماً محدداً أو قابلاً للعد أو قد يكون Continuais إذا كان من الممكن أن يأخذ قيمة غير محدده مثل الاوزان ودرجات الحرارة وغيرها وعلى هذا فإن التوزيعات الاحتمالية يمكن أيضاً أن تنقسم إلى قسمين :-

(١) توزيعات احتمالية منفصله Discrete Probability distributian

(٢) توزيعات احتمالية متصله Continuaus probibity distributian

أولاً : التوزيعات الاحتمالية المنفصله

(١) توزيع بواسون The Poisson distribution وينسب هذا التوزيع إلى العالم سيمون دنيس بواسون (١٧٨١ - ١٨٤٠) وحتى يمكن فهم هذا التوزيع علينا أن نتذكر أن المتغير العشوائى المنفصل هو الأساس لهذا التوزيع إذ أن الأمر يتعلق هنا بعدد مرات وقوع حدث معين خلال فترة زمنية معينه - ما عدد السيارات التى يمكن أن يبيعها المعرض فى اليوم الواحد - ما عدد المكالمات التى تصل إلى مكتب عميد الكلية كل ٥ دقائق - ما عدد الطائرات التى تصل مطار القاهرة كل ١٠ دقائق وكل هذه

الامور - المتغيرات العشوائية - يمكن أن تأخذ الأرقام صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ الخ .

أى أن س يمكن أن تأخذ إحدى هذه القيم المحددة ويمكن الحصول على احتمال أخذ المتغير العشوائى إحدى هذه القيم طبقاً لتوزيع بواسون

$$P(s) = \frac{\lambda^s \times e^{-\lambda}}{s!}$$

حيث λ = متوسط عدد مرات وقوع الحدث فى خلال فترة زمنية معينة

$\lambda = ٢,٧١٨٢٨$ أساس اللوغاريتمات الطبيعيه « نابيريانيه »

ح (س) هو احتمال حدوث المتغير العشوائى س

، س يمكن أن تأخذ أى قيمه من القيم المشار إليها سابقا .

وقد أمكن إعداد جداول لإحتمالات بواسون حيث λ تمثل متوسط عدد مرات وقوع الحدث خلال فترة من الزمن - والجدول رقم (١) يبين إحتمالات المتغير العشوائى س لمتوسطات تتراوح بين ١ و ٢٠ و جدير بالذكر أن بعض المراجع تعبّر عن المتوسط بالرمز μ بدلا من λ

فى هذه الحالة نجد أن

$$P(s) = \frac{\mu^s \times e^{-\mu}}{s!}$$

وسنعمل على إيضاح استخدامات توزيع بواسون الاحتمالى بعدد من الأمثلة الملوله ثم نتبعها ببعض التمرينات .

سؤال (١)

إذا كان متوسط عدد الزبائن الذين يدخلون أحد المحلات التجارية = ٣
زبائن كل ٥ دقائق أوجد الإحتمالات الآتية :-

(١) دخول زبون واحد خلال ٥ دقائق

(٢) وصول زبونين خلال ٥ دقائق

(٣) دخول ٣ زبائن خلال ٥ دقائق على الأقل

$$\frac{3^x \times e^{-3}}{x!} = \text{إحتمال دخول زبون واحد : من القانون ح (س)}$$

$$\text{ح (١)} = \frac{3^{-2.718} \times 3^1}{1!} = \frac{3}{3^{2.718}} = 0.1494$$

ويمكن الحصول على هذه القيمة من الجدول مباشرة وذلك تحت المتغير العشوائى س = ١ والمتوسط ٣ نجد الرقم ٠.١٤٩٤ ، وهى نفس النتيجة التى وصلنا لها .

وكذلك من الجدول نجد ح (٢) = ٠.٢٢٤٠ .

$$\frac{3^{-2.718} \times 3^2}{2!} \text{ وهى تساوى أيضا من القانون}$$

وعلى ذلك سنستخدم الجداول باستمرار فى حل التمارين ما لم يطلب خلاف ذلك .

احتمال دخول ٣ زبائن على الأقل

$$= ١ - (\text{احتمال عدم دخول أى زبون} + \text{دخول زبون واحد} + \text{دخول زبونين})$$

$$= -1 (,٠٤٩٨ + ,١٤٩٤ + ,٢٢٤٠)$$

$$= -1 (,٤٢٣٢)$$

$$= ,٥٧٦٨$$

مثال (٢) :

إذا كان احتمال رسوب طالب في الامتحان = ١٠٪ من واقع خبرة الماضي
ما احتمال رسوب ١٥ طالب من بين ١٥٠ طالب بكلية الإدارة وبطلوا الامتحان .

الحل :

متوسط عدد حالات الرسوب من واقع خبرة الماضي

$$١٥ = \frac{١٠}{١٠٠} \times ١٥٠ = ١٥$$

$$المطلوب ح (١٢) = ,٠٨٢٩$$

مثال (٣)

إذا كان عدد المراكب التي دخلت ميناء الاسكندرية العام الماضي = ١٤٦٠
مركبا ما احتمال .

(١) وصول ٣ مراكب في يوم معين من العام الحالي .

(٢) وصول ٣ مراكب على الأكثر في يوم معين .

(٣) وصول ٣ مراكب على الأقل .

في هذه الحالة متوسط عدد المراكب التي تصل يوميا

$$= ٣٦٥ \div ١٤٦٠ = ٤$$

أى أن $٢ = ٤$

(١) ح (٢) — من الجدول = ١٩٥٤ ,

(٢) إحتمال وصول ٣ مراكب على الأكثر

= ح (صفر) + ح (١) + ح (٢) + ح (٣) من الجدول

= ١٨٣ , + ٠,٧٣٣ + ١٤٦٥ , + ١٩٥٤ , = ٤٣٣٥ ,

(٣) إحتمال وصول ٢ مراكب على الأقل

١ - [ح (صفر) + ح (١) + ح (٢)]

١ - [١٨٣ , + ٠,٧٣٣ + ١٤٦٥ ,]

= ٢٣٨١ - ١ ,

= ٧٦١٩ ,

مثال (٤)

إذا كان متوسط عدد الطائرات التى تصل مطار القاهرة خلال ساعتين = ١٢ طائرة ما إحتمال وصول ٤ طائرات خلال الساعة .

متوسط عدد الطائرات التى تصل كل ساعه = ٦ طائرات

ح (٤) على أساس أن المتوسط $٢ = ٦$ من الجدول = ١٣٣٩ ,

تجارين على توزيع بواسون

(١) إذا كان متوسط عدد المكالمات التي تصل إلى سويتش الكلية = ٨ مكالمات في الساعة ما احتمال وصول ٢ مكالمات في الساعة على الأقل ، ٢ فقط ، ٣ على الأكثر .

(٢) إذا كان متوسط عدد المبيعات من السيارات لأحد المعارض = ٣ سيارات في اليوم ما احتمال أن يبيع ٥ سيارات على الأكثر في أحد الأيام .

(٣) إذا كان احتمال رسوب الطالب في مادة الإحصاء = ٥٪ من واقع خبرة الماضي - ما احتمال رسوب ١٠ طلاب على الأكثر من بين ١٤٠ طالب دخلوا الامتحان .

(٤) إذا كان متوسط عدد حوادث السيارات التي تقع يوميا في أحد المدن = ٣ حوادث يوميا ، ما احتمال عدم وقوع أى حادث في يوم معين .

التوزيع ثنائي الحدين

Binomial Distribution

ويعتبر من التوزيعات الإحصائية المنفصلة ولهذا فإن هذا التوزيع الإحصائي يقوم على أساس افتراض إجراء تجربة معينة عدة مرات وإحتمال النجاح في أى مره يكون ثابتا والتوزيع الاحتمالي يعطينا إحتمال النجاح صفر مره ، مره واحده ، مرتين الخ . إحتمال النجاح r من المرات من بين n من المرات (عند مرات إجراء التجربه) .

وهذا الاحتمال = n ق r ح $(1 - \text{ح})^{n-r}$

حيث $ح$ إحتمال النجاح فى المرة الواحدة ، r عدد حالات النجاح المطلوبه ، n عدد مرات إجراء التجربة ، $(1 - \text{ح}) = ل$ أيضا إحتمال الفشل فى المرة الواحدة.

وينسب هذا التوزيع إلى العالم الرياضى اكسريسىرى برتولى Bernoulli Process - وتقوم هذه العملية على الأسس الآتية :-

١- اجراء التجربة عدد من المرات مقداره n

٢- فى كل مره تجرى فيها التجربة يوجد إحتمال نجاح = $ح$ وإحتمال فشل $ل = 1 - \text{ح}$ وهو إحتمال ثابت من تجربة لأخرى .

٣- كل تجربة من التجارب تعتبر مستقلة عن التجربة الأخرى .

مثال (١)

تعرض أن التجربة هي إلقاء قطعة من النقود ٣ مرات - احتمال النجاح في كل مرة وهو الحصول على صورة $\frac{1}{4}$ وإحتمال الفشل $\frac{3}{4}$ وعند إجراء التجربة ٣ مرات فإن المتغير العشوائى س (عدد مرات نجاح التجربة) = صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ وينطبق القانون ث ق ح دل نـ

$$\begin{aligned}
 \text{ن ق صفر ح صفر ل} &= {}^3\text{ق صفر} \left(\frac{1}{4}\right) {}^2\text{صفر} \left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8} \\
 \text{ن ق ١ ح ١ ل} &= {}^3\text{ق ١} \left(\frac{1}{4}\right) {}^2\text{ق ١} \left(\frac{1}{4}\right) {}^1\text{ق ١} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} \\
 \text{ن ق ٢ ح ٢ ل} &= {}^3\text{ق ٢} \left(\frac{1}{4}\right) {}^2\text{ق ٢} \left(\frac{1}{4}\right) {}^1\text{ق ٢} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8} \\
 \text{ن ق ٣ ح ٣ ل صفر} &= {}^3\text{ق ٣} \left(\frac{1}{4}\right) {}^2\text{ق ٣} \left(\frac{1}{4}\right) {}^1\text{ق ٣} \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8} \\
 \hline
 &= 1
 \end{aligned}$$

ويكون التوزيع الإحتمالى كما يلى :

س	ح (س)	
صفر	$\frac{1}{8}$	= ١٢.٥
١	$\frac{3}{8}$	= ٣٧.٥
٢	$\frac{3}{8}$	= ٣٧.٥
٣	$\frac{1}{8}$	= ١٢.٥
	<hr/>	<hr/>
	١	١٠٠ -

مثال (٢)

عند القاء زهرة طاوله ٤ مرات المطلوب الحصول على رقم ٥ إحتمال النجاح
 $\frac{1}{4} = ح$ وإحتمال الفشل $ل = \frac{3}{4}$ فإن التوزيع الاحتمال يكون كما يلي :-

س	ح (س)	
صفر	$٤ \text{ ق صفر } (\frac{1}{4}) \text{ صفر } (\frac{3}{4}) = ٦٢٥ / ١٢٩٦ = ٤٨٢٣$	
١	$٤ \text{ ق } ١ (\frac{1}{4}) \text{ ١ } (\frac{3}{4}) = ٥٠٠ / ١٢٩٦ = ٣٨٥٨$	
٢	$٤ \text{ ق } ٢ (\frac{1}{4}) \text{ ٢ } (\frac{3}{4}) = ١٥٠ / ١٢٩٦ = ١١٥٧$	
٣	$٤ \text{ ق } ٣ (\frac{1}{4}) \text{ ٣ } (\frac{3}{4}) = ٢٠ / ١٢٩٦ = ١٥٤$	
٤	$٤ \text{ ق } ٤ (\frac{1}{4}) \text{ ٤ } (\frac{3}{4}) = ١ / ١٢٩٦ = ٨٠٠٠٠$	
		<hr/>
		١

وقد أمكن إعداد جداول لحساب توزيع ثنائي الحدين كما هو موضح بالجدول
 رقم ٢ حيث n تمثل عدد مرات إجراء التجربة ، x المتغير العشوائى أى عدد مرات
 النجاح المطلوبه - وكذلك إحتتمالات النجاح إعتباراً من ٠.٥ لغاية ٥.٠ ويمكن
 الحصول على قيم المثال الأول من الجدول رقم (٢)
 فى المثال الأول إحتتمال النجاح فى أى مرة $= ٥$ ، وعدد مرات إجراء
 التجربة $= ٤$ وبالكشف فى الجدول أمام $n = ٢$ وتحت إحتتمال ٥ ، ونجد

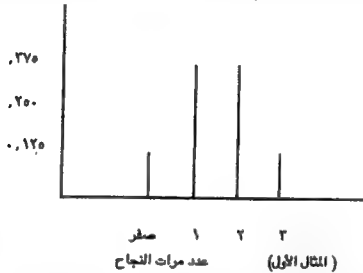
$$ح (\text{صفر}) = ١٢٥٠$$

$$ح (١) = ٣٧٥٠$$

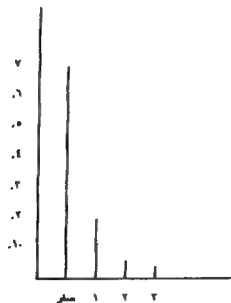
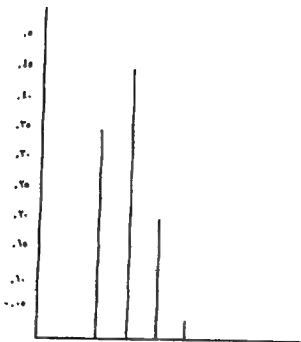
$$ح (٢) = ٣٧٥٠$$

$$ح (٣) = ١٢٥٠$$

وأما بالنسبة للمثال الثانى فإحتمال النجاح $\frac{1}{4}$ غير موجود بالجدول (١٦٦٧) لأن الموجود لإحتمال نجاح ١٥ ، ٢٠ ، ويمكن تمثيل توزيع ثنائى فى الحدين بيانيا كما يتضح من رسم المثال الاول .



ويلاحظ من رسم هذا المثال أنه متماثل ومنتظم تماما - عندمرات إجراء التجربة ٣ مرات وإحتمال النجاح فى المرة الواحدة = ٥ ، والآن نرسم هذا التوزيع ثنائى الحدين بفرض أن إحتمال النجاح فى المرة الواحدة = ٣ ، وكذلك أو لنرى إتجاه الرسم .



وبلاحظ من الرسوم السابقة أنه كلما أنخفض احتمال النجاح في المرة الواحدة كلما كان المنحنى ملتوياً وهو ملتوى إلى جهة اليمين .

وبديهى لمو إرتفع احتمال النجاح في المرة الواحدة فإن المنحنى يفقد أيضاً التماثل ويميل إلى الإلتواء جهة اليسار .

توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ثنائى الحدين

فى كثير من الأحيان قد لانجد الجداول اللازمة لحساب الاحتمالات المختلفة للتوزيع ثنائى الحدين ولهذا قد تلجأ إلى توزيع بواسون كتقريب للتوزيع ثنائى الحدين ولكن بشرط .

$$(١) \text{ أن يكون } n \geq ٥٠$$

$$(٢) \text{ أن يكون } n \leq ٢٠$$

وفى هذه الحالة سنستخدم توزيع بواسون بفرض أن المتوسط = $n \times p$ وسنقوم بحساب القيم الخاصة بتوزيع ثنائى الحدين وتوزيع بواسون مع فرض أن $n = ٢٠$ وأن $p = ٠.١$

وفى هذه الحالة يستخدم توزيع بواسون بفرض أن

$$\lambda = n \times p = ٢٠ \times ٠.١ = ٢$$

وسنوضح الفرق فى حدود أربعة أرقام عشرية .

المتغير العشوائى	الاحتمال (ثنائى الحدين)	الاحتمال (بواسون)	الفرق
صفر	,٨١٧٩	,٨١٨٧	,٠٠٠٨
١	,١٦٥٢	,١٦٣٧	,٠٠١٥
٢	,٠١٥٩	,٠١٦٤	,٠٠٠٥
٣	,٠٠١٠	,٠٠١١	,٠٠٠١

مما سبق يتضح وجود فروق ضئيلة جداً تجعلنا نتق فى هذا التقريب

الفصل الرابع
التوزيعات المتصلة (المستمرة)

التوزيعات المتصلة (المستمرة)

التوزيع العادى

Normal Distribution

- أهمية التوزيع العادى :

يعتبر التوزيع الإحتمالى العادى Normal probability, distribution هو أهم التوزيعات الاحتمالية التى يمكن إستخدامها لوصف المتغير العشوائى المستمر .. بل يرى الكثير من رجال الاحصاء أن هذا التوزيع يعتبر حجر الزاوية فى النظرية الاحصائية الحديثه وترجع الأهمية القصوى لهذا التوزيع إلى أنه وجد مناسبا لوصف الكثير من الظواهر من بينها الخصائص المتعلقة بوصف الانسان نفسه من حيث التوزيعات التكرارية للأوزان والأطوال وكذلك الاختبارات الخاصة بمستوى الذكاء وإذا تركنا الجوانب الإنسانية ونظرنا لبعض الظواهر الأخرى مثل الأعمار الخاصة بالمصابيح الكهربائية أو بطاريات السيارات أو غيرها - أو توزيع درجات الطلاب لو جدناه يصلح لوصفها ولعل من أهم خواص التوزيع العادى أنه يمكن استخدامه بنجاح كتقريب للكثير من التوزيعات الاحتمالية مثل التوزيع ثنائى الحدين وتوزيع بواسون وغيرها مع ملاحظة أن التوزيع ثنائى الحدين أو توزيع بواسون من التوزيعات المنفصلة أى التى تتصل بالاشياء التى يمكن عدّها فى حين التوزيع العادى من التوزيعات المستمرة التى يمكن قياسها والتوزيعات المنفصلة تأخذ فيها محدوده ومعدوده فى حين أن التوزيعات المستمرة يمكن أن تأخذ أى قيمة ونظرا لأن هذا التوزيع العادى من التوزيعات التى تصف المتغيرات العشوائية التى يمكن أن تأخذ أى قيمة فإننا لا نقوم عادة بحساب إحتمال كل قيمة من هذه القيم اللانهائية ولهذا فإننا نعلم عادة بحساب إحتمال أن تكون القيمة فى حدود معينه

فنقول مثلاً احتمال أن يكون وزن الشخص بين ٧٥ ، ٨٠ كيلو = ٣ ، ولا يمكن أن نقوم بحساب الاحتمال لكل وزن من الأوزان على حده لأن هذه الأوزان يمكن أن تأخذ ملايين القيم . والأمـر هنا يختلف مثلاً عن توزيع ثنائى الحدين أو توزيع بواسون فنقول مثلاً احتمال وصول ٥ طائرات للمطار خلال ساعه = ٤٠ ، .

- الأصل التاريخى

ويرجع الفضل الأساسى إلى ظهور هذا التوزيع الإحتمالى وإلى تطوره إلى علماء القرن الثامن عشر أمثال كارل جوس Karl Gauss

- والذي كثيراً ما يسمى هذا التوزيع باسمه تكريماً له وغيره من العلماء
أمثال بيير لابلاس Pierre Laplace وإبراهيم موثر Abraham de Moirre

- خصائص المنحنى العادى أو كما يسمى فى بعض الأحيان الطبيعى .

(١) المنحنى العادى له شكل الناقوس bell Shape

وله قمة واحدة Single peak

(٢) المنحنى متماثل تماماً حول محور رأسى يصل بين قمة المنحنى ويقطع المحور الأفقى عند نقطة تمثل قيمة الوسط الحسابى والوسيط والمتوال لتساوى قيم هذه المتوسطات عند هذه النقطة وحيث أن هذا المحور هو محور التماثل ويصل القمة بقيمة المتوسطات على المحور الأفقى فإن هذا يعنى أن أكبر تكرار يكون عند القمة وهو الذى يقابل قيم المتوسطات - وتقل هذه التكرارات تدريجياً كلما إتجهنا إلى اليمين - زيادة القيم عن المتوسط أو إتجهنا إلى اليسار نقص القيم عن المتوسط وكلما إبتعدنا أكثر وأكثر عن المتوسط كلما قلت التكرارات ولهذا نقول أن للمنحنى العادى طرفان « ذيلان » طويلان يمتدان ذات اليمين وذات اليسار

لمسافات طويله وتقريان من المحور الأفقى دون أن يمساها .

The two tails extend in difinitely and never touch the horizontal axis

(٣) رغم أنه من المفروض نظريا أن طرفى المنحنى يمتدان يمينا ويساراً إلى ما لانهاية دون أن يمسا المحور الأفقى ، إلا أننا نهتم من الناحية العملية بالقيم التى تزيد أو تنقص عن الوسط الحسابى بمقدار ٢ وحدات معيارية حيث أن المساحة الكلية تحت المنحنى = ١ (مجموع الاحتمالات) - النصف عن اليمين والنصف على اليسار - فإذا رمزنا للوسط الحسابى بالرمز \bar{x} وللانحراف المعيارى بالرمز σ فإن المساحة بين

$$\bar{x} - 1\sigma \text{ إلى } \bar{x} + 1\sigma = 0.6826$$

$$\bar{x} - 2\sigma \text{ إلى } \bar{x} + 2\sigma = 0.9544$$

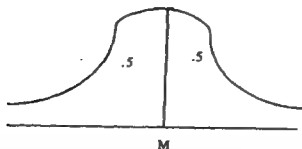
$$\bar{x} - 3\sigma \text{ إلى } \bar{x} + 3\sigma = 0.9973$$

تفسير ذلك أن ٦٨.٢ ٪ من قيم المفردات لاتزيد أو تنقص عن الوسط الحسابى إلا بوحدة معيارية فقط أى أن ٣٤.١ ٪ من القيم تزيد عن الوسط الحسابى بمقدار وحده معيارية واحده ، ٣٤.١ ٪ من القيم تنقص عن الوسط الحسابى بمقدار وحده معيارية واحده .

وبالمثل ٩٥.٤ ٪ من قيم المفردات لاتختلف عن الوسط الحسابى إلا فى حدود وحدتين معياريتين فقط وكذلك ٩٩.٧ ٪ من قيم المفردات تزيد أو تنقص عن الوسط الحسابى بمقدار ٣ وحدات معيارية فقط ولذلك كان الاهتمام العلى قاصرا على هذه الحدود .

وعلى ذلك إحتمال أن تزيد قيمة المتغير عن الوسط الحسابى = ٥٠ ٪

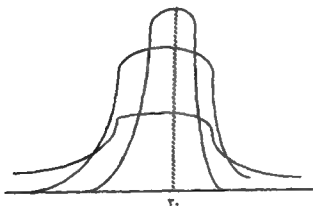
وإحتمال أن تقل عن الوسط الحسابي = ٥٠٪



وفي حالة تعادل الوسط الحسابي فإن شكل المنحنى العادى يختلف حسب الانحراف المعيارى فكلما زاد الانحراف المعيارى كلما زاد تفرطح المنحنى كما يتضح من الأشكال الآتية :

$$\sigma = 20$$

$$\sigma = 40, 80$$



تعريف Z

ويمكن أن تعرف Z بأنها تمثل الفرق بين قيمة أى متغير س والوسط الحسابى \bar{M} بدلالة الوحدات المعيارية

فمثلا لو كان متوسط وزن الطالب = ٧٠ كيلو بانحراف معيارى ٥ كيلو وكان وزن أحد الطلاب = ٨٠ كيلو فإن الفرق بين وزن الطالب والمتوسط

س - \bar{M}

$= ٨٠ \text{ كيلو} - ٧٠ \text{ كيلو} = ١٠ \text{ كيلو}$ بالوحدات المطلقة أى بالكيلو جرام وأما

الفرق بدلا له الوحدات المعيارية

$$\frac{٢ - ١}{٧٠ - ٨٠} = Z$$

$= ٢$ وحدة معيارية

وتوجد جداول لحساب الإحتمالات عند قيم Z المختلفة فمثلا تحت $Z = ١$ نجد أن الاحتمال $= ٣٤١٣$ ، وهذا يعنى أنه إحتمال أن تكون قيمة المتغير بين الوسط الحسابى وبين الوسط الحسابى مضافا له وحدة معيارية واحدة $= ٣٤١٣$ ، وهكذا - وبهذا يمكن الحصول على الإحتمالات المختلفة .

وعلى ذلك يمكن أن نتصور أن الوسط الحسابى ينحرف عن نفسه بالقيمة صفر من الواحدات المعيارية فإذا أرينا أن نعرف مثلا إحتمال أن تتراوح قيمة المتغير بين الوسط الحسابى والوسط الحسابى مضافاً إليه $١,٥$ وحدة معيارية فإن هذا الاحتمال $= ٤٣٣٢$ ، وبهذا يمكن إستخدام الجداول لقياس الإحتمالات المختلفة كما يتضح من الأمثلة الآتية :-

سؤال (١)

فى دراسة عن محو الأمية فى مصر تبين أن عدد الساعات اللازمه لذلك يخفض للتوزيع العادى وأن الوسط الحسابى لعدد الساعات اللازمه $= ٦٠٠$ ساعه ويأنحراف معيارى قدره ١٠٠ ساعه أوجد الاحتمالات الآتية :-

أ- ما إحتمال أن شخصا تم إختياره بطريقة عشوائية يحتاج إلى أكثر من ٦٠٠ ساعه لمحو أميته .

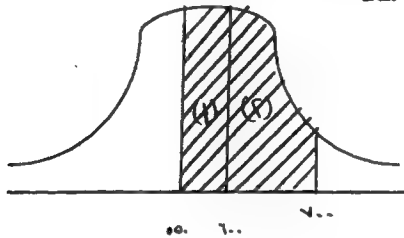
ب- ما احتمال أن يحتاج هذا الشخص إلى مدة تتراوح بين ٥٥٠ ، ٧٠٠ ساعة لمحو أميته .

ج- ما احتمال أن يحتاج هذا الشخص إلى ٥٠٠ ساعة على الأقل لمحو أميته .

د- ما احتمال إحتياجه إلى ٤٠٠ ساعة على الأكثر لمحو أميته .

أ- الإحتمال المطلوب = ٥ ,

ب- احتمال إحتياج الشخص إلى مدة تتراوح بين ٥٥٠ ساعة ، ٧٠٠ ساعة



الفرق بين ٥٥٠ ، ٦٠٠ = ٥٠ ساعة

عدد الوحدات المعيارية $z = \frac{50}{100}$

عندما $z = ٥$, يكون الإحتمال رقم (١)

,١٩١٥

الفرق ٧٠٠ - ٦٠٠ = ١٠٠ ساعة

$z = \frac{100}{100} = ١$ (عدد الوحدات المعيارية)

الاحتمال رقم (٢) = ٣٤١٣ ،

الاحتمال المطلوب = ٣٤١٣ + ١٩١٥ ،

$$= ٥٣٢٨ ،$$

(ج) احتمال ٥٠٠ ساعه على الأقل

من ٥٠٠ ، ٦٠٠ — مع اهمال الإشارة

$$= ١٠٠ ساعه$$

$$١ = ١٠٠ \div ١٠٠ = Z$$

$$٣٤١٣ = (١) ح \quad \frac{1}{1} = (١) ح$$

الاحتمال المطلوب = ٣٤١٣ + ٥ = ٨٤١٣ ،

(د) احتمال ٤٠٠ ساعه على الاكثر

احتمال ٦٠٠ على الاكثر = ٥ ،

الفرق بين ٦٠٠ ، ٤٠٠ = ٢٠٠ ساعه

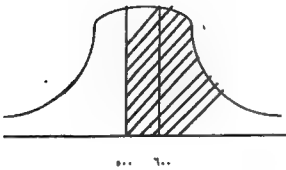
$$٢ = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = Z$$

ح (من ٤٠٠ ساعه إلى ٦٠٠ ساعه)

$$= ٤٧٧٢ ،$$

الاحتمال المطلوب = ٤٧٧٢ - ٥ ،

$$= ٠٢٢٨ ،$$



مثال (٣)

إذا كان متوسط عدد المشاهدين لمباريات النادي الأهلي = ٥٠٠٠٠ مشاهد
بأنحراف معياري = ١٥٠٠٠

ما احتمال :

(١) أن يقل عدد المشاهدين عن ٦٢٠٠٠ .

(٢) ألا يقل عدد المشاهدين عن ٧٠٠٠٠

(٣) أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٤٠٠٠٠ ، ٧٠٠٠٠

الحل :

(١) احتمال أن يقل عدد المشاهدين عن ٦٢٠٠٠



الاحتمال المطلوب = ٥ , (احتمال أن يقل عدد المشاهدين عن ٥٠٠٠٠)

+ احتمال أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٥٠٠٠٠ ، ٦٢٠٠٠

الفرق بالوحدات المطلقة = س - م = ٦٢٠٠٠ - ٥٠٠٠٠

= ١٢٠٠٠ مشاهد

قيمة Z (الانحراف بالوحدات المعيارية) = $\frac{١٢٠٠٠}{١٥٠٠٠}$, ٨ =

الاحتمال من الجدول = ٢٨٨١ ,

الاحتمال المطلوب = ٢٨٨١ + ٠ , = ٧٨٨١ ,

(٢) إحتمال ألا يقل عدد المشاهدين عن ٧٠٠٠٠ معناه أحتمال أن يكون عدد المشاهدين ٧٠ ألف فأكثر

= ٠ , - احتمال أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٥٠٠٠٠ , ٧٠٠٠٠

الفرق بالارقام المطلقة = ٧٠٠٠٠ - ٥٠٠٠٠ = ٢٠٠٠٠

$$1,33 = \frac{20000}{15000} = Z$$

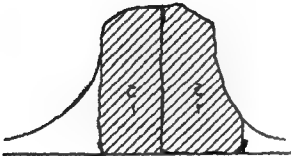
ح (من الجدول) = ٤٠٨٢ ,

وهو إحتمال أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٥٠٠٠٠ , ٧٠٠٠٠

الاحتمال المطلوب = ٤٠٨٢ - ٠ , = ٠٩١٨ ,

إحتمال أن يتراوح عدد المشاهدين بين ٤٠٠٠٠ , ٧٠٠٠٠

وهذا الاحتمال يتكون من ح ١ , ح ٢



٤٠٠٠٠ ٥٠٠٠٠ ٧٠٠٠٠

الحصول على ح الفرق بالارقام المطلقة = ٥٠٠٠٠ - ٤٠٠٠٠ = ١٠٠٠٠ مع

إعمال الاشارة

$$,67 = \frac{10000}{150000} = Z$$

١٣ — من الجدول ٢٤٨٦ ،

$$\text{للحصول على } ١٣ = Z = \frac{٥٠٠٠ - ٧٠٠٠}{١٥٠٠} = \frac{٢٠٠٠}{١٥٠٠} \text{ مشاهد}$$

$$١٣ = ١,٢٣ , ١٣ = ٤٠,٨٢$$

$$\text{الاحتمال المطلوب} = ١٣ + ٢٣$$

$$= ٢٤٨٦ + ٤٠,٨٢ = ٦٥٦٨ ,$$

تطبيق عملي :

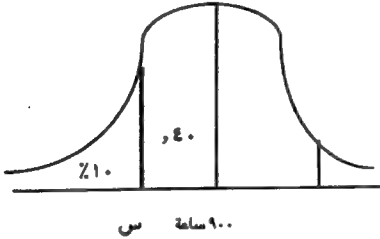
يمكن استخدام التوزيع المعيارى العادى "Standard Normal Distri bution"

فى إيجاد الحلول للمشاكل العملية خصوصاً تلك المتعلقة باعطاء الضمانات عن عدد ساعات تشغيل المصابيح الكهربائية أو عدد كيلومترات تشغيل إطار السيارات أو المدد اللازمة للضمان للسلع المختلفة وسنوضح ذلك الأمر بمثال عملي:

بفرض أن إحدى الشركات تنتج نوعاً معيناً من المصابيح وأن الوسط الحسابى للعمر الافتراضى = ٩٠٠ ساعة بانحراف معيارى قدره ٦٠ ساعة وإذا افترضنا أن الشركة ترد للمشتري نصف ثمن المصباح إذا قل العمر الافتراضى للتشغيل عن عدد معين من الساعات س فإذا أرادت الشركة أن يتحمل ما قيمته ٥٪ من قيمة المبيعات ما هو عدد الساعات س الذى نضعه فى الضمان لأقرب رقم صحيح لصالح الشركة .

حيث أن الشركة ترد نصف قيمة المصباح وأنها ترغب فى تحمل ما قيمته ٥٪ من قيمة المبيعات ، فإن الشركة تكون على استعداد لرد نصف قيمة المصباح وذلك لما يعادل ١٠٪ من المبيعات . وكان المطلوب هنا هو الإجابة عن السؤال الآتى:

إذا كان احتمال أن يكون عدد ساعات التشغيل (العمر الافتراضى) أقل من س = ١٠٪ ما هي قيمة س



إحتمال أن يتراوح العمر الافتراضى بين س ، ٩٠٠ ساعة = ٤ ، قيمة Z من الجدول التى تعطى إحتمالا = ٤ ،

= تقريبا ١,٢٨

لأنه عند $Z = ١,٢٨$ يكون الإحتمال ٣٩٩٧ ، $٤ =$ ، وتقريباً، الفرق بين ٩٠٠ ساعة ، س ساعة بدلالة الوحدات المعيارية $١,٢٨$ وحيث أن الانحراف المعيارى $= ٦٠$ ساعة

الفرق بالساعات $= ٦٠ \text{ ساعة} \times ١,٢٨$ وحده انحراف معيارى

$= ٧٦,٨$ ساعة

س . $= ٧٦,٨ - ٩٠٠ = ٨٢٣,٢$ ساعة

$= ٨٢٣$ ساعة لأقرب رقم صحيح لصالح الشركة .

مثال :

إذا كان متوسط العمر الافتراضى لنوع معين من أنواع إطارات السيارات الذى تنتجه إحدى الشركات = ٢٥٠٠٠ كيلو متر ويأتحراف معيارى ٥٠٠٠ كيلو متر - وإذا كانت الشركة ترد $\frac{1}{4}$ ثمن بيع الإطار لكل من يقل العمر الافتراضى للإطار الذى يشتريه عن عدد معين من الكيلو مترات - أوجد العدد الواجب تحديده فى هذا الضمان إذا أرادت الشركة أن تتحمل من أجل ذلك خصما يوازى ٥٪ من المبيعات .

الحل :

حيث أن الشركة ترد $\frac{1}{4}$ ثمن بيع الإطار فقط وحيث أن جملة ما تتحملة = ٥٪ من قيمة المبيعات .

∴ من المفروض من أن ترد الشركة لهذه القيمة ما يوازى ١٥٪ من حجم المبيعات .

يفرض أن عدد الكيلو مترات المطلوب وضعه فى ضمان بيع الإطار = س

إحتمال أن يكون العمر الافتراضى أصغر من س = ١٥٪

إحتمال أن يتراوح العمر الافتراضى بين س ، ٢٥٠٠٠ كيلومتر

$$= ٥ - ١٥ = ٢٥$$

الاحتمال = ٢٥ ، والمطلوب الآن الحصول على قيمة Z من الجدول

$$= - ١,٠٤$$

أى أن س تقل عن الوسط الحسابى وهو ٢٥٠٠٠ كيلو بمقدار ١,٠٤ وحدة معيارية .

الفرق بالأرقام المطلقة = $١,٠٤ \times ٥٠٠٠ = ٥٢٠٠$ كيلومتر

$$س = ٢٥٠٠٠ - ٥٢٠٠ = ٢٩٨٠٠ \text{ كيلومتر}$$

ويمكن الحل القانون كما يلي :-

$$\frac{س - س_0}{\sigma} = Z .$$

$$\frac{س - ٢٥٠٠٠}{٥٠٠} = ١,٠٤ -$$

$$س - ٢٥٠٠٠ = ٥٢٠٠ -$$

$$س = ٢٥٠٠٠ + ٥٢٠٠ =$$

$$٢٩٨٠٠ \text{ كيلومتر}$$

وهو الرقم الواجب وضعه في الضمان .

تقريب التوزيع الاحتمالي ثنائى الحدين للتوزيع العادى .

Normal Approximation of Binomial Probabilities

سبق أن أوضحنا أنه من الممكن الحصول على التوزيع ثنائى الحدين من

القانون .

$$ن ق س \quad س \quad (١ - ح) ن - س$$

حيث ن عدد مرات إجراء التجربة ، ح احتمال النجاح فى المرة الواحدة ،

(١ - ح) = احتمال الفشل فى المرة الواحدة والمتغير العشوائى س = عدد مرات

النجاح المطلوبة ، ثم أوضحنا أنه يمكن الاعتماد على الجداول للحصول على هذه

القيم ولكن عندما تكون قيم ن كبيرة فإنه قد لا نجد هذه القيم فى الجداول .

ويرى رجال الأحصاء أنه من الممكن الاعتماد على التوزيع العادي كتقريب للتوزيع ثنائي الحدين عندما تكون .

$$ن \times ح \leq ٥ ، ن (ح - ١) \leq ٥$$

وفي هذه الحالة نجد أن الوسط الحسابي

$$م = ن \times ح$$

$$= \sigma$$

$$\sqrt{ن \times ح \times (ح - ١)} \quad \text{مثال :}$$

القيت بقطعة من النقود ١٦ مرة إلى أعلى أوجد احتمال الحصول على صورة ٦ مرات .

أولا من الجداول .

ثانياً بالتقريب للتوزيع العادي .

الحل :

$$\text{أولا من الجدول } ن = ١٦ ، س = ٦$$

$$\text{نجد أن الاحتمال} = ١٢٢٢ ،$$

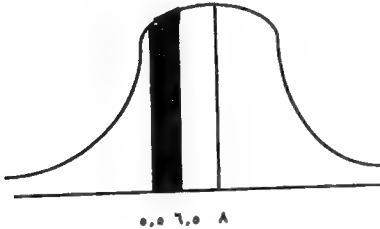
ثانياً باستخدام التقريب للتوزيع العادي

$$م = ١٦ \times \frac{١}{٢} = ٨$$

$$\sigma = \sqrt{١٦ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}} = ٢$$

نظرا لأن الاحتمالات بالنسبة للتوزيعات المستمرة تصب كمساحة تحت دالة الكثافة الإحصائية ولهذا فإنه لحساب احتمال الحصول على ٦ صور فإننا نحسب

المساحة تحت المنحنى العادى بين ٦,٥ ، ٥,٥ وهذا من توزيع منفصل (ثنائى الحدين) إلى توزيع متصل (التوزيع العادى)
وعلى ذلك يمكن حساب إحتمال الحصول على ٦ صور كما يلى :-



$$1,25 - = \frac{8 - 5,5}{2} = (1) Z$$

$$,2944 = (1) C$$

$$,75 - = \frac{8 - 6,5}{2} = (1) Z$$

$$,2734 = (2) C$$

والاحتمالى المطلوب = $C(1) - C(2)$

$$,2734 - ,2944 =$$

$$,1210 =$$

مقابل ١,٢٢ من الجدول

وهو فرق بسيط يدل على أن التقريب يعطى نتائج جيدة ولا شك فى أن هناك مشكلة تتعلق بعملية التقريب لأن توزيع ثنائى الحدين هو توزيع منفصل فى حين أن التوزيع العادى هو توزيع متصل - وفهم هذه الحقيقة نفرض أننا ألقينا بزهرة من زهرات الطاولة ١٢ مرة بدون تحيز فإن احتمال الحصول على رقم ٥ ست مرات $= {}^{12}C_6 \left(\frac{1}{6}\right)^6 \left(\frac{5}{6}\right)^6$

$$= 0.066324$$

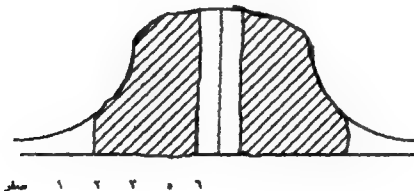
وإحتمال الحصول على رقم ٥ سبع مرات $= {}^{12}C_7 \left(\frac{1}{6}\right)^7 \left(\frac{5}{6}\right)^5$

$$= 0.11369$$

ولكن من المستحيل أن تحصل على رقم ٥ عدد يزيد عن ٦ مرات ويقل ٧ مرات لأن هذا الاحتمال = صفر لأنه لا يمكن الحصول على رقم ٥ إلا بعدد صحيح من المرات أو صفر مرة (صفر، ١، ٢، ٣، ١٢) ولكن هذا الكلام غير منطقي وغير جائز بالنسبة للإحتمالات التى تتناول المتغيرات العشوائية المستمرة أى عندما تأخذ قيمة المتغير العشوائى س أى رقم بصورة مستمرة سواء كان عددا صحيحا أو كسرا وعلى ذلك إذا نظرنا إلى منحنى التوزيع العادى لوجدنا لهذا الإحتمال قيمة معينة أكبر من الصفر .

والوصول الى حل لهذه المشكلة نتصور التوزيع التالى والخاص بالقاء زهرة

الطاولة ١٢ مرة



لو أخذنا ح (س ≤ ٦) ، ح (س ≥ ٥) وأردنا تقرييهما باستخدام التوزيع العادى وأخذنا المساحة على يمين رقم ٦ والمساحة على يسار رقم ٥ لكان مجموع المساحتين أصغر من الواحد الصحيح فى حين أن مجموعهما ١ طبقا للتوزيع تناثى الحدين الذى يقوم على أساس الأرقام الصحيحة فقط والمشكلة هنا فى المساحة بين رقم ٥ ، ٦

ولحل هذه المشكلة نعطى نصف هذه المساحة الى ح (س ≤ ٦) ولهذا عند حساب ح (س ≤ ٦) يحتسب المساحة على يمين ٦ - ٥ ، ٥ = ٥ ، ٥ ولحساب قيمة ح (س ≥ ٥) نحسب المساحة على يسار ٥ + ٥ ، ٥ = ٥ ، ٥ وهذا النصف هو الذى نسميه معامل التصحيح للاستمرارية .

مثال :

ألقيت بقطعة من النقود المعدنية ٨ مرات إلى أعلى ما احتمال الحصول على صوره س من المرات حيث س ≤ ٢ ، ٦ ≥ س ≥ ٢

بدون تصحيح ، مع التصحيح

الحل :

$$\text{الوسط الحسابى} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} \times 8 = \frac{1}{8} \quad \text{والانحراف المعيارى} = \frac{1}{8} \times 8 = 1,414$$

$$Z = \frac{\frac{1}{8} - 2}{1,414} \quad \text{بدون تصحيح} \quad (1)$$

$$1,414 = \frac{1}{8} - 2 \quad \text{ح (1)} = 0,4207$$

$$Z = \frac{\frac{1}{8} - 2}{1,414} = \frac{1}{8} - 2 \quad \text{ح (2)} = 0,4207$$



$$\text{الاحتمال} = 0,4207 \times 2 = 0,8414$$

وفي حالة التصحيح

$$1,77 = \frac{2,0 -}{1,414} = \frac{4 - 1,0}{1,414} = (1) Z$$

$$,4616 = (1) C$$

$$1,77 = \frac{2,0}{1,414} = \frac{4 - 1,0}{1,414} = (2) Z$$

$$,4616 = (2) C$$

$$,9232 = 2 \times ,4616 = \text{الاحتمال}$$

مثال :

في المثال السابق ما احتمال أن يكون عدد الصور أكبر من ٦ بدون تصحيح، مع التصحيح

أولا : بدون تصحيح ح بين ٤ ، ٦ من المثال السابق = ٤٢٠٧ ، الاحتمال المطلوب = ٥ - ، ٤٢٠٧ = ،٧٩٢ ،

ثانيا مع التصحيح : تحسب بين ٤ ، ٥ ، ٥ لأننا نرجع نصف وحده للتصحيح ولنقسم المسافة بين ٥ ، ٦

$$1,06 = \frac{1,0}{1,414} = \frac{4 - 0,0}{1,414} = Z$$

$$,2004 = C$$

$$,2004 - ,0 = \text{الاحتمال المطلوب}$$

$$,1446 =$$

The EX Panential Distribution

يستخدم هذا التوزيع عادة كنموذج جيد عندما يتعلق الأمر بمتغير عشوائي يمثل الزمن أو الوقت اللازم لقضاء خدمة معينة كخدمه الطبيب أو الخدمة التي يقدمها ميكانيكى السيارات أو الخدمة فى محل تجارى - أو متوسط العمر الافتراض لآى أصل من الأصول ولهذا التوزيع مقياس واحد فقط هو λ كما سنوضح فيما بعد .

كما أن الوسط الحسابى لهذا التوزيع = الانحراف المعيارى لأن التباين = مربع الوسط الحسابى

$$د (س) \text{ أو } ح (س)$$

$$= \lambda - س$$

حيث $\lambda = ٢,٧١٨٢٨$ كمية ثابتة

أساس اللوغاريتمات الطبيعية

$$= \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

$$\frac{1}{\lambda} = \text{الوسط الحسابى للتوزيع}$$

$$\frac{1}{\lambda} = \text{التباين}$$

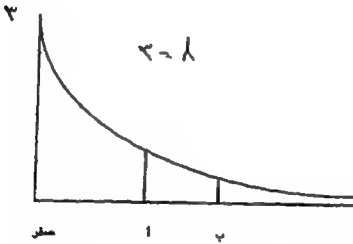
ويجب أن نوضح معنى λ بوضوح حتى يمكن الوصول إلى الحل السليم .

إذا كان الطبيب يستطيع أن يخدم ٤ مرضى فى الساعه فإن الوسط الحسابى للوقت اللازم لخدمة المريض الواحد = $\frac{1}{4}$ وهنا $\lambda = ٤$ أى أن λ عدد المرضى الذين يخدمهم الطبيب فى الساعه الواحده .

كما يجب أن نشير إلى أن هذا التوزيع يتعلق بقيمة موجبة فقط للمتغير العشوائى الذى لا يمكن أن يأخذ قيمة سالبة لأنه يمثل الوقت اللازم لقضاء خدمه معينه .

وإذا رسمنا عدد من المنحنيات الخاصه بهذا التوزيع نجدها تقطع محور الصادات عند القيمه λ ومعنى هذا أن ح (صفر) = λ

كما أن احتمال أن المتغير العشوائى للتوزيع الأسى يأخذ القيمة من أ إلى ب= المساحه تحت المنحنى من النقطة أ إلى النقطة ب



كما تم تخصيص جدول خاص بهذه التوزيعات وسنوضح كيفية إستخدام هذه الجداول بمثال عملى :

مثال :

إذا كان متوسط الوقت اللازم لعلاج المريض فى إحدى عيادات الهيئة العامه للتأمين الصحى = $\frac{1}{\lambda}$ ساعه للمريض الواحد وأن ذلك يخضع لتوزيع الدالة الأسية . ما نسبة عدد المرضى الذين يتم حد منهم فى خلال ساعه واحدة ،

فى خلال $\frac{1}{4}$ ساعه ، خلال ١٠ دقائق ، فى خلال مدة تتراوح بين ساعه واحده ، ٢ ساعات حيث أنه من الممكن خدمه المريض فى $\frac{1}{4}$ ساعه

∴ فى المتوسط يمكن خدمه ٣ مرضى فى الساعه الواحدة أى أن $\lambda = 3$

الحاله الأولى أن يتم الخدمة فى خلال ساعه واحدة حيث س تمثل الوقت اللازم لأداء الخدمة وهو يساوى أو ١ أو صفر من ساعه أى $s \geq 1$

المطلوب هو ح ($s \geq 1$)

فى هذه الحاله $s = 1 \times 3 = \lambda$

نكشف فى الجدول ف ($s = \lambda$) على يمين ٢ نجد أن الرقم = ٩٥ .

وهذا يعنى أن ٩٥ ٪ من المرضى يتم خدمتهم خلال مدة زمنية لا تتجاوز الساعه .

(٢) نسبة المرضى الذين يتم خدمتهم فى خلال $\frac{1}{4}$ ساعه ح ($s \geq \frac{1}{4}$)
فى هذه الحاله نجد أن $s = \lambda = 3 \times \frac{1}{4} = 0.75$ بالكشف فى الجدول
على يمين ٠.٧٥ نجد أن الاحتمال = ٧٧.٧ ، أى أن ٧٧.٧ ٪ من المرضى
تم خدمتهم فى خلال نصف ساعه

(٣) فى خلال ١٠ دقائق —> نحول إلى ساعات (خلال $\frac{1}{6}$ ساعه)

ح ($s \geq \frac{1}{6}$)

$s = \lambda = 3 \times \frac{1}{6} = 0.5$

بالكشف فى الجدول على يمين ٠.٥ نجد أن الاحتمال = ٣٩٣.٢ ، أى أن ٣٩.٣ ٪
من المرضى يتم خدمتهم فى خلال ١٠ دقائق .

(٤) بين ١ ، ٣ ساعات :

أ . فى حالة $s \geq ٣$ ساعات

$$s \lambda = ٣ \times ٣ = ٩$$

الاحتمال من الجدول = ٩٩٩٨٩ , وهذا معناه إحتمال أن يتم أداء الخدمة خلال مدة أكبر من الصفر ولغاية ٣ ساعات .

ب- فى حالة $s \geq ١$ ساعه ح ($s \geq ١$) = ٩٥ , كما سبق الاشاره إليه

∴ نسبة المرضى الذين يعالجون خلال مده تتراوح بين ساعه واحده ، ٣

ساعات

$$= ٩٩٩٨٩ - ٩٥ ,$$

$$= ٠.٤٩٨٩ ,$$

أى ٥٪ تقريبا من المرضى .

تمارين على التوزيعات الإحتمالية

(١) فيما يلي بيان عن مبيعات السيارات لإحدى الشركات خلال ٣٠٠ يوم
عمل . المطلوب إعداد جدول التوزيع الإحتمالي وكذلك الوسط الحسابي
والانحراف المعياري .

عدد السيارات المباعة (س)	عدد الأيام (التكرار ك)
صفر	٣٠
١	٤٥
٢	٥١
٣	١١٤
٤	٣٩
٥	١٨
٦	٢
	<hr/> ٣٠٠

(٢) في التمرين السابق ما هي القيمة المتوقعة للريح اليومي إذا كانت دالة
الريح = أ س + ب = ٢٠٠٠ س + ٦٠٠٠ وكذلك الانحراف المعياري للريح
اليومي .

إرشاد :

(١) القيمة المتوقعة للريح اليومي = أ × القيمة المتوقعة للمتغير س + ب

ق . م للريح اليومي = ٢٠٠٠ ق . م للمتغير س + ٦٠٠٠ .

(٢) تباين الدالة الخطية $\sigma^2 (أ س + ب)$

$$= \sigma^2 أ \times \sigma^2 س$$

$$= أ \times \text{تباين المتغير العشوائى س}$$

$$(٢) \text{ الانحراف المعيارى للدالة الخطية } = \sqrt{أ \times \text{تباين س}}$$

(٣) إذا كان إحتمال الفوز فى أى مره $= \frac{1}{5}$ ويفرض أنك لعبت ٥ مرات
أوجد باستخدام التوزيع ثنائى الحدين إحتمال الفوز للقيم المختلفة
للمتغير العشوائى س اعتباراً من س = صفر إلى س = ٥

أ- باستخدام القانون

ب- باستخدام الجداول

وما هو الوسط الحسابى والانحراف المعيارى لهذا التوزيع .

(٤) دلت الاحصاءات على أنه من كل ١٠٠٠ فرد يدخلون محل شيكويرل
يشترى ٣٠٠ فرد منهم فإذا دخل المحل ٦ أفراد أوجد باستخدام التوزيع
ثنائى الحدين الاحتمالات الآتية :-

(١) أن يشتري ٢ أفراد منهم فقط

(٢) أن يشتري ٣ أفراد منهم على الأكثر

(٣) أن يشتري ٣ أفراد منهم على الأقل

(٥) إذا كان إحتمال أن تكون الوحدة تالفه من إنتاج آلة معينه $= ٥ \%$ أخذنا
٢٠ وحدة منها بطريقة عشوائية باستخدام التوزيع ثنائى الحدين من

الجدول أوجد الاحتمالات الآتية :-

(١) أن يكون من بينها وحده واحدة تألفه على الأقل .

(٢) أن يكون من بينها وحده ٥ وحدات تألفه على الأكثر

(٣) أن يكون من بينها ١٥ وحده تألفه

(٦) تدل خبره السنوات الماضية أنه من كل ١٠ طلاب يجتاز الامتحان في المتوسط ٣ طلاب من الراغبين في اختبار امتحان الدكتوراه - بفرض أن ٨ طلاب دخلوا إمتحان العام العالى أوجد بنون استخدام الجداول الاحتمالات الآتية :-

(أ) إحتمال نجاح طالب واحد على الأقل

(ب) إحتمال نجاح ثلاث طلاب على الأكثر

(ج) إحتمال نجاح ٦ طلاب على الأكثر

(٧) صنوق به ١٠٠٠ من سلعه معينه نصفها سليم والنصف الآخر معيب سحبنا ٢٠ وحده بطريقة عشوائية أوجد الاحتمالات الآتية :-

(أ) إحتمال أن يكون من بينها ٢ وحدات سليمة على الأقل .

(ب) إحتمال أن يكون من بينها ١٧ وحده سليمة على الأكثر .

(ج) إحتمال ألا يقل عدد الوحدات السليمة عن وحدتين ولاتزيد عن ٥ وحدات .

(٨) إذا كان متوسط عدد السيارات التى يبيعها أحد الوكلاء = ٤ سيارات يوميا - نفرض تطبيق توزيع بواسون أوجد الإحتمالات الآتية :-

(أ) إحتمال عدم بيع أى سيارة فى أحد الأيام .

(ب) إحتمال بيع عدد يتراوح بين سيارتين ، ٥ سيارات فى اليوم .

(ج) إحتمال أن يبيع أكثر من ٧ سيارات فى اليوم .

(٩) إذا كان متوسط عدد الطلبات التى ترد على سلعه معينه = ٢ فى الساعه الواحده - بفرض تطبيق توزيع بواسون

(أ) ما إحتمال الحصول على ٣ طلبات خلال ساعه

(ب) ٣ طلبات على الأقل خلال ساعه

(ج) إحتمال الحصول على ٣ طلبات على الأكثر خلال ساعه .

(١٠) إذا كان متوسط عدد الطائرات التى تصل إن مطار القاهرة = ٣ طائرات فى الساعه ما إحتمال عدم وصول أى طائرة فى خلال ساعه واحد - ما أحتمال وصول أقل من ٦ طائرات فى الساعه - ماهو عدد الطائرات الأكثر شيوعا والذي يمكن أن يصل كل ساعه .

إيضاح ————— العدد الأكثر شيوعا هو الخوال .

(١١) أوجد المساحه تحت منحنى التوزيع المعيارى العادى لكل من الفترات

التالية

أ- بين $1 = Z$ ، $2 = Z$

ب- بين $Z = \text{صفر}$ ، $1,5 = Z$

ج- بين $Z = 1 -$ ، $1 + = Z$

د- Z أكبر من $2,08$

(١٢) أوجد قيمة Z على المحور تحت منحني التوزيع المعيارى العادى وذلك فى الأحوال الآتية :-

أ- عندما تكون المساحة بين الصفر ، $Z = 4772$ ،

ب- عندما ما تكون المساحة على يمين $Z = 0014$ ،

ج- عندما تكون المساحة على يسار $Z = 9986$ ،

(١٣) إذا كان متوسط العمر الافتراضى لإطار السيارة = ٣٠ ألف كيلو متر بانحراف معيارى ٥٠٠٠ كيلو - وإذا افترضنا أن العمر الافتراضى للإطار يخضع لتوزيع العادى إذا أخذنا أحد الإطارات بطريقة عشوائية أوجد الاحتمالات الآتية :-

أ- أن يزيد العمر الافتراض عن ٣٠ ألف كيلو مترا

ب- أن يقل العمر الافتراضى عن ٣٠ ألف كيلو مترا

ج- أن يتراوح العمر الافتراضى بين ١٥ ألف كيلو متر ، ٤٠ ألف كيلو متر

د- أن يزيد العمر الافتراضى عن ٤٥٠٠٠ ألف كيلو

هـ- أن تقل العمر الافتراضى عن عشرة آلاف كيلو

(١٤) إذا كان متوسط الأجر فى إحدى الشركات = ٨٠٠ جنيه شهريا بانحراف معيارى = ٢٠٠ جنيه ما هو الحد الأدنى للأجر الذى يجب أن يحصل عليه أحد الأشخاص لكى يعتبر ضمن العشرة فى المائة الذى يحصلون على أعلى الأجور .

(١٥) إذا كان متوسط الزمن اللازم لحل الامتحان من واقع خبره السنوات السابقة = ١٢٠ دقيقة بانحراف معيارى قدره ٢٥ دقيقة ما هو الوقت الواجب منحه للطلاب لحل هذا الامتحان إذا أراد الأستاذ أن يكون الوقت كافيا لنسبة مقدراها ٨٠ ٪ من الطلاب لإنهاء الامتحان كله .

(١٦) إذا كان متوسط عدد المشاهدين لمباريات كرة القدم لنادى الزمالك = ٣٠٠٠ مشاهد بانحراف معيارى قدره ٥٠٠٠ أوجد الاحتمالات الآتية بفرض أن الظاهرة تخضع للتوزيع العادى .

أ- أن يزيد عدد المشاهدين فى أحد المباريات عن ٨٠ ألف مشاهد .

ب- أن يقل عدد المشاهدين عن ١٢ ألف مشاهد

ج- أن يتراوح عدد المشاهدين بين ١٥ ألف مشاهد ، ٤٠ ألف مشاهد.

(١٧) إذا كان متوسط وزن العلب من سلعة معينة = ٥٠٠ جرام بانحراف معيارى قدره ٥٠ جرام وإذا كان التاجر لا يقبل أى علبه يقل وزنها عن ٤٥٠ جرام ما نسبة العلب المرفوضة .

(١٨) القيت بقطعة من النقود مائة مره إلى أعلى أوجد الإحتمالات الآتية على أساس تقريب التوزيع ثنائى الحدين للتوزيع العادى بالتصحیح ويئون تصحيح .

أ- الحصول على الصورة ٥٠ مرة .

ب- الحصول على الصورة ٤٠ مرة على الأقل

ج- الحصول على الصورة عدد يتراوح بين ٣٠ ، ٧٥ مرة

د- الحصول على الصورة ٧٠ مرة على الأكثر .

(١٩) إذا كان متوسط دخل الموظف في إحدى الشركات يخضع للتوزيع العادي بوسط حسابي ٨٠٠ جنيه شهريا وإنحراف معياري = ١٥٠ جنيه أوجد الاحتمالات الآتية :-

أ- أن يتراوح أجر الموظف بين ٥٠٠ جنيه ، ٩٠٠ جنيه .

ب- ألا يزيد المرتب عن ١٢٠٠ جنيه

ج - أن يقل المرتب عن ٣٨٠ جنيه

(٢٠) إذا كان متوسط الوقت اللازم للتدريب على برنامج للحاسب الآلي = ٢٥٠ ساعة بانحراف معياري قدره ٥٠ ساعة أوجد الإحتمالات الآتية :-

(١) أن ينهى أحد الافراد البرنامج في مدة تقل عن ١٢٠ ساعة

(٢) أن ينهى أحد الافراد البرنامج خلال ١٥٠ ساعة على الأقل .

(٣) أن ينهى البرنامج خلال ١٢٠ ساعة على الأكثر .

الفصل الخامس

المعاينة وتوزيع المعاينة

المعينة وتوزيع المعينة

Sampling and Sampling Distribution

وصف الظواهر المختلفة

الحصص الشامل للمجتمع أو أسلوب العينات : عند الرغبة في معرفة خصومات عن إحدى الشركات الكبرى والتي يبلغ عد العاملين بها ١٠٠٠٠ موظف مثلا مثل الوسط الحسابي للأجر والانحراف المعياري لهذا الأجر ونسبة الحاصلين مثلا على مؤهلات عليا وفاته من الممكن الاعتماد على نظام الحصص الشامل لكل العاملين فنجد مثلا متوسط المرتب الشهري = ٥٠٠ جنيه والانحراف المعياري = ١٥٠ جنيه ونسبة الحاصلين على مؤهلات عليا = ٤٠ %

وهذه المقاييس نطلق عليها مقاييس المجتمع كله والوسط الحسابي يرمز له بالرمز $\mu = ٥٠٠$ جنيه والانحراف المعياري بالرمز $\sigma = ١٥٠$ جنيه

والنسبة ح (أ) = ٤٠ %

ولكن بدلا من الإعتماد على المجتمع الأصلي فقد تأخذ عينه بطريقة عشوائية من عدد من العاملين وليكن ٥٠ موظف ويمكن أن تعطينا نتائج قريبا جدا من نتائج المجتمع الأصلي إذا كانت نعتبر عن المجتمع تعبيراً صادقا .

وفي هذه الحالة نطلق عليها احصاءات العينة Statistics بدلا من مقاييس المجتمع Parameters مستخدم س أو \bar{X} للوسط الحسابي للعينة ، تستخدم S أو ع للانحراف المعياري للعينة.

اسباب الأخذ بنظام العينات :

مما لا شك فيه أن أسلوب الاعتماد على نظام العينات يوفر وقتا كبيرا ، بل

قد يكون من الصعب الاعتماد على نظام الحصر الشامل أو حتى من المستحيل القيام بالحصر الشامل لضيق الوقت - كما هو الحال بالنسبة لاستطلاع الرأي الخاص بالمرشحين للانتخابات والذي تقوم به المعاهد المتخصصة على فترات قصيرة . والسبب الثانى يتعلق أيضا بالتكاليف - فيمكن مثلا الاعتماد على عينة من ٤٠٠٠ شخص بدلا من حصر عدة ملايين حصراً شاملاً يكلف مبالغ طائلة والسبب الثالث الذى يجعلنا نلجأ لأسلوب العينات هو عنصر الدقة فى الحصول على المعلومات عندما يتعلق الأمر بعدد محدود هو مفردات العينة وفى كثير من الأحيان نجد أنه من المستحيل الاعتماد على نظام الحصر الشامل للمجتمع - فهل من الممكن إجراء الفحص على صنفقة المواد الغذائية المستوردة بالكامل أم الاكتفاء بنظام العينات .

وكذلك عند اختبار صلاحية شحنة من الذخيرة فهل نلجأ لتدمير الشحنة كلها للتأكد من صلاحيتها ؟ كل هذا الأسباب تدفعنا للاعتماد على أسلوب المعاينة Sampling لدراسة خصائص المجتمع الأصلي .

أنواع العينات :

توجد طريقتان أساسيتان لإختيار العينات من المجتمعات عينات عشوائية Random Samplig وعينات غير عشوائية . وبالنسبة للعينات العشوائية فإنها العينات التى تتم على أساس إعطاء فرصة متكاملة لكل مفردة من مفردات المجتمع للاختيار, Same Prbability of being selected فإذا كان لدينا مجتمعا محدوداً وأخذنا منه عينة عشوائية مكونة من n من المفردات فإن كل وحده فى المجتمع لها فرصة متكافئة للاختيار . فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا أربعة أشخاص

أحمد ، بركة ، جاد ، ندى

أ ب ج د

وأردنا اختيار عينه من فردين وكان لكل من أ ، ب ، ج ، د فرص متكافئه
فإنه من الممكن أن نختار

أ ، ب أو أ ، ج أو أ ، د أو ب ، ج أو ب ، د
أو ح ، د وعدد العينات الممكنة = ٦

$$٦ = ٣ ق٢$$

ولكل فرد من الأفراد ولكل عينه من هذه العينات فرصه متكافئه للاختيار
وأما بالنسبة للعينات غير العشوائية فهي التى يتم إختيارها على أساس
تقدير شخصى يستند إلى خبره معينه عن المجتمع - وقد تستخدم العينه غير
العشوائية كمرشد أو دليل قبل اختيار العينة العشوائية .

وبالنسبة للعينة العشوائية نفسها توجد طرق مختلفة لإختيارها . وبغلا عما
سبق تجدد الاشاره إلى أن المعاينة يمكن أن تؤخذ من مجتمع محدود أو مجتمع
غير محدود وعموما تستخدم الأرقام العشوائية عند إختيار العينات .

توزيع المعاينة Sampling Dialni butuon

إذا أخذنا الأرقام من ١ إلى ٥

أى (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥)

وأردنا إختيار عينه من رقمين فإن عدد العينات الممكنة = ٣ ق٢ = ١٠

وهذه العينات هي : ١/٢ ، ٢/١ ، ٣/١ ، ١/٤ ، ٢/٤ ، ٣/٤ ، ٤/٢ ، ٤/٥ ، ٥/٢ ، ٥/٤

٤/٣ ، ٥/٣ ، ٥/٤

$$\bar{x} = \frac{0+1+2+2+1}{5} = 2 \quad \text{الوسط الحسابى للمجتمع الأسمى}$$

الوساط الحسابيه للعينات العشره =

١,٥ ، ٢ ، ٢,٥ ، ٣ ، ٣,٥ ، ٤ ، ٤,٥ ، وإذا أردنا الحصول على

$$\bar{x} = \frac{20}{10} \quad \text{الوسط الحسابى لهذه الأرقام لوجدناه}$$

وهذا يعنى أن الوسط الحسابى للمجتمع الأسمى = الوسط الحسابى لتوزيع المعاينة . أى الوسط الحسابى لجميع الأرقام التى تعبر عن الأوساط الحسابيه لجميع العينات الممكنة - ففى المثال السابق يوجد ١٠ عينات ولكل عينه وسط حسابى والذى يساوى الوسط الحسابى للمجتمع الأسمى هو الوسط الحسابى للأوساط الحسابيه لهذه العينات ولكن هذا يختلف تماماً عن الوسط الحسابى لكل عينه على حده - فكلما رأينا فى المثال السابق أصغر وسط حسابى كان ١,٥ للعينه (١ ، ٢) وأكبر وسط حسابى كان ٤,٥ للعينه (٤ ، ٥)

الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة

الأوساط الحسابيه لكل العينات الممكنه

هى ١,٥ ، ٢ ، ٢,٥ ، ٣ ، ٣,٥ ، ٤ ، ٤,٥ ، وانحرافاتهما
عن الوسط الحسابى لها وهو ٣ =

١,٥ - ١ = -٠,٥ ، صفر ، -٠,٥ ، صفر ، ٠,٥ ، ١ - ١,٥ = ٠,٥ ، ٢ - ١,٥ = ٠,٥ ، ٢,٥ - ١,٥ = ١,٥ ، ٣ - ١,٥ = ١,٥ ، ٣,٥ - ١,٥ = ٢,٥ ، ٤ - ١,٥ = ٢,٥ ، ٤,٥ - ١,٥ = ٣,٥ ، ومجموع مربعات الانحرافات هى :-

$$٧,٥ = ٢,٢٥ + ١ + ٢,٥ + ٢,٥ + ٢,٥ + ١ + ٢,٢٥$$

$$\text{التباين} = \frac{٧,٥}{10} = ٠,٧٥$$

(١) الانحراف المعياري = $\sqrt{٧٥} = ٨,٦٦$

الانحراف المعياري للمجتمع الأصلي

قيم مفردات المجتمع ١ ٢ ٣ ٤ ٥

الانحراف عن الوسط الحسابي -٢ -١ صفر ١ ٢

مربعات الانحرافات ومجموعها ٤ ١ صفر ١ ٤ = ١٠

التباين = $\frac{١٠}{٥} = ٢$ والانحراف المعياري = $\sqrt{٢}$

الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

وإذا كان المجتمع الذي نأخذ منه العينة مجتمعاً محدوداً فإن الانحراف المعياري لتوزيع المتابعه

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-n}} =$$

حيث n = عدد مفردات العينة

N = عدد مفردات المجتمع

σ = الانحراف المعياري للمجتمع وعلى ذلك نجد أنه طبقاً للمثال

السابق نجد أن الانحراف المعياري لتوزيع المعاينة

$$\frac{\sqrt{\frac{٢-٥}{١-٥}}}{\sqrt{\frac{٢}{٢}}} \times \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} =$$

(٢) $٨,٦٦ = \frac{\sqrt{٢}}{\sqrt{٤}} =$

وهي نفس النتيجة التي وصلنا إليها في رقم (١)

وخلاصة القول أنه إذا أخذنا عينه عشوائية من مجتمع معين فإن الأمر لا يقتصر على عينه واحدة ولكن يمكن أخذ عدد كبير من العينات ويتوقف ذلك على المجتمع وهل هو محدود أو غير محدود وحتى لو كان المجتمع محدوداً فإن عدد العينات =

عدد مفردات المجتمع

ق

عدد مفردات العينة

نقن

حيث ن عدد مفردات المجتمع N

ن عدد مفردات العينة n

وتوزيع المعانيه يخضع للتوزيع العادى أى يمكن وضعه بالتوزيع العادى وبوسط حسابى = الوسط الحسابى للمجتمع الاصلى

وإنحراف معيارى $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ والذى $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ بالنسبة للمجتمعات المحدوده .

ويطلق الاحصائيون لفظ الخطأ المعيارى على الانحراف المعيارى لتوزيع

المعانيه "Standard Error"

كما أوضحنا أن أبسط طريقة لإختيار لعينة العشوائية هو الاعتماد على جدول الأرقام العشوائية مثل الجدول المرفق بهذا الكتاب - وجدل الأرقام العشوائية يمكن إعداداه بطرق كثيرة ولكن أبسط هذه الطرق تتمثل فى وضع الأرقام من صفر إلى ٩ فى كيس وسحب ورقة من الكيس وتسجل الرقم ثم رد الورق المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الثانى وخط الأوراق جيداً ثم سحب ورقه

ثانيه ويسجل الرقم وورقة ثالثة ورابعه وهكذا يمكن تكوين جدول أرقام عشوائية
بأى عدد من الأعمده والصفوف .

انواع العينات :

سبق أن أوضحنا بأنه يوجد طريقان لإختيار العينات من المجتمع هما
العينات غير العشوائية أى التى تعتمد على التقدير الشخصى والعينات العشوائية
أو الاحتمالية وهذه بدورها تنقسم إلى الأنواع الآتية :-

١- العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sampling

٢- العينة المنظمه Systematic Sampling

٣- العينة الطبعية Stratified Sampling

٤- عينة المجموعات Cluster Sampling

١- العينة العشوائية البسيطة

سبق أن أوضحنا أن هذه العينة يتم أخذها على أساس

(١) إعطاء كل عينه ممكنه فرصه متكافئة للإختيار وكذلك .

(٢) إعطاء كل عنصر فى المجتمع فرصه متكافئة فى الإختيار وأبسط طرق
الاختيار هو الإعتماد على الأرقام العشوائية .

سواء تم ذلك باستخدام جداول الأرقام العشوائية أو بإستخدام الحاسب
الالى .

ففى المثال الذى أشرنا إليه حيث يتكون المجتمع من ٥ أرقام هى ١ ، ٢ ، ٣ ،

٤ ، ٥ وبيننا أن عدد العينات الممكن = ١٠ عينات (بفرض عدم الرد (Without Replacement) (١)

فإن لكل عينة فرصه متكافئة للظهور ويكون احتمال ظهور العينة = $\frac{1}{10}$
للعينات العشر وهي

$$[٥/٤ ، ٥/٣ ، ٤/٣ ، ٥/٢ ، ٤/٢ ، ٣/٢ ، ٥/١ ، ٤/١ ، ٣/١ ، ٢/١]$$

ولكن احتمال ظهور رقم ١ فى العينة

$$ح (١) = ح (٥/١ + ٤/١ + ٣/١ + ٢/١)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = ٤$$

وكذلك كل من ح (٢) ، ح (٣) ، ح (٤) ، ح (٥) = ٤ ، والهدف من هذا المثال هو إظهار المجتمع المحدود تمييزاً له عن المجتمع غير المحدود - وإن كان البعض يرى أن كل مجتمع يمكن حصره والمسألة تحتاج فقط إلى وقت وإمكانات - وكذلك إثبات أن لكل عينة فرصه متكافئة للإختيار وكذلك لكل مفردة فى المجتمع فرصه متكافئة فى الأختيار

العينه المنتظمة « طبقاً لنظام معين » Systematic

وهى العينه التى يتم إختيارها طبقاً لنظام معين حيث يتم إختيار العينه من المجتمع على فترات منتظمة طبقاً لترتيب معين أو زمن معين أو مكان معين .

(١) فى حالة الرد يكون عدد العينات الممكنه = ٢٥ أى تساوى (عدد مفردات المجتمع)
مرفوعه للاس ٢ وهو عدد مفردات العينه - وفى هذه الحالة نجد أن أى مفردة يمكن أن
تكرر فى نفس العينه أى نختار ٢ ، ٢ لأننا نرد المفردة قبل المسحبه الثانيه .

فمثلاً إذا أخذنا الترتيب كأساس وأردنا أن نأخذ عينه من عدد من العاملين فيمكن الرجوع إلى سجل الأرقام المسلسلة ونختار أى رقم عشوائى لتبدأ به وليكن رقم ٧ ثم رقم ١٧ ، ٢٧ وهكذا إلى أن يتم إختيار العدد المطلوب - وإذا أردنا أن نجرى دراسة بالعينة على العملاء لإحدى المنشآت التجارية فيمكن أن نختار رقماً عشوائياً نبدأ به وليكن الساعة العاشرة صباحاً ثم نسال الزبون أو العميل الذى يصل كل ١٠ دقائق وهكذا والعشوائية هنا فى الرقم الأول وأما الأرقام التالية فيتم إختيارها طبقاً لنظام معين .

٣- العينة الطبقية Stratified Sampling

وفى هذه الحالة يتم تقسيم المجتمع إلى مجموعات متجانسة كل مجموعة منها تسمى طبقة ويتم اختيار عدد معين من كل طبقة بطريقة عشوائية ويحدث ذلك عادة عند وجود إختلاف جوهري بين طبقات المجتمع المختلفة ونريد تمثيل العينة لكل هذه الطبقات - فمثلاً إذا أردنا أن نقوم بدراسة حول الطلب على سلعة معينة فيجب علينا أن نفرق بين الريف والحضر وحتى داخل المدن فإنه يتعين التفريق بين الأحياء المختلفة حسب مستوى المعيشة ومستوى الدخل وأنواق المستهلكين كما يتم إعطاء كل طبقة من الطبقات عدداً من حجم العينة يتناسب مع حجم الطبقة بالنسبة للمجتمع كله أى يتم التوزيع بالنسبة والتناسب .

فمثلاً إذا كان حجم المجتمع كله = ٥٠٠٠ وحجم العينة = ١٠٠ وكانت طبقات المجتمع أ ، ب ، ج ، ٣٠٠٠ ، ١٥٠٠ ، ٥٠٠ فإن عدد مفردات العينة للطبقات الثلاث = ٦٠ ، ٣٠ ، ١٠ على الترتيب ولكن بالإضافة إلى هذا الأسلوب يوجد أسلوب آخر ويسمى التوزيع الأمثل وفى هذه الحالة يتم الترجيح بالإنحراف المعيارى لكل طبقة على الوجه الآتى :-

عدد مفردات المجتمع كله = ن

عدد مفردات كل طبقة من المجتمع = n_1 ، n_2 ، n_3

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$

عدد مفردات العينة كلها = n

عدد المفردات من كل طبقة = n_1 ، n_2 ، n_3

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$

والانحراف المعياري لكل طبقة = σ_1 ، σ_2 ، σ_3

$$n = \frac{n_1 \times \sigma_1^2 + n_2 \times \sigma_2^2 + n_3 \times \sigma_3^2}{n_1 + n_2 + n_3}$$

وبالمثل يمكن الحصول على n_2 ، n_3

$$\text{مثال } n_1 = 2000 ، n_2 = 2000 ، n_3 = 2000$$

$$\sigma_1 = 10 ، \sigma_2 = 5 ، \sigma_3 = 4 ، n = 100$$

$$n_1 = \frac{10 \times 2000 \times 100}{4 \times 2000 + 5 \times 2000 + 10 \times 2000}$$

$$= 60$$

$$n_2 = \frac{5 \times 2000 \times 100}{\text{المقام}} = 20$$

$$\text{وكذلك } n_3 = 20$$

٤- عينه المجموعات Cluster Sampling

وأساس التقسيم هنا هو التشابه بين المجموعات أى أن كل مجموعة

متشابهة مع المجموعة الأخرى ولكن داخل كل مجموعه يوجد خلاف ، عكس الحال

بالنسبة للعينات الطباقية حيث نجد أن كل طبقة تختلف عن الطبقة الأخرى فطبقة أهل الريف تختلف عن طبقة أهل المدن ولكن داخل الطبقة الواحد يوجد تشابه بين مفردات الطبقة تعود إلى عينه المجموعات .

فعند القيام بدراسة معينة عن الأسرة مثلا فإنه من الممكن تقسيم المدينة الكبيرة إلى أجزاء مختلفة واختيار عدد المنازل من كل جزء للقيام بالدراسة ، وهنا الأسلوب إذا أحسن تنفيذه يؤدي إلى إختيار عينات دقيقة بتكاليف بسيطة للغاية .

توزيع الوسط الحسابى للعينة س عند المعاينة من مجتمع سادى

كما سبق الإشارة إليه إذا كان لدينا المتغير العشوائى س وكان هذا المتغير يخضع للتوزيع العادى بوسط حسابى μ وإنحراف معيارى σ فإنه من الممكن أخذ عدد كبير من العينة حجم كل منهم ن ولكل عينه وسط حسابى \bar{x} وإنحراف معيارى ع فإن س تنتمى أيضا إلى توزيع عادى وسطه الحسابى $\mu = \mu_x = \mu_{\bar{x}}$ لوصله الحسابى للمجتمع (وإنحرافه المعيارى $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$)

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \text{ويسمى هذا التوزيع توزيع المعاينة ويمكن استخدام } \mu, \sigma, \sigma_{\bar{x}}$$

وسبق أن أوضحنا أن الإنحراف المعيارى لتوزيع المعاينة يسمى الخطأ

المعيارى Standard Error ويرمز له بالرمز $\sigma_{\bar{x}}$ س

وتلخيصا لما سبق يمكن القول أنه عند أخذ عينات حجم كل منها ن من مجتمع له خصائص التوزيع العادى فإن الوسط الحسابى لتوزيع المعاينة = الوسط الحسابى للمجتمع الأصلى والإنحراف المعيارى لتوزيع المعاينة = الإنحراف المعيارى للمجتمع مقسوما على الجذر التربيعى لعدد مفردات العينة كما أن توزيع المعاينة يكون توزيعا عاديا .

ويرجع السبب فى تسمية الإنحراف المعيارى لتوزيع المعاينة بالخطأ المعيارى

إلى أنه عندما نقوم بأخذ عدد من العينات عن ظاهرة معينة فإن كل عينة من هذه العينات يكون لها وسط حسابي يختلف عن الوسط الحسابي للمجتمع وتختلف الأوساط الحسابية للعينات المختلفة عن بعضها البعض بسبب ما يمكن تسميته بخطأ المعاينة نتيجة الصدفة .

Sampling Error due to Chance (١)

أى أن هذه الفروق بين الأوساط الحسابية للعينات المختلفة فيما بينها وكذلك وكذلك بينها وبين المجتمع يرجع إلى العناصر التى تم اختيارها لكل عينة من العينات . وعلى ذلك فتوزيع المعاينة الذى يتميز بضالة الخطأ المعيارى أفضل بكثير من توزيع العينة الذى يتزايد فيه الخطأ المعيارى وحيث أن الخطأ المعيارى = خارج قسمة الانحراف المعيارى للمجتمع على الجذر التربيعى لحجم العينة ، ولذلك نرى أنه كلما كبر حجم العينة كلما أنخفضت قيمة الخطأ المعيارى تفرض ثبات الانحراف المعيارى للمجتمع . وكذلك ينخفض الخطأ المعيارى لتوزيع المعاينة بإنخفاض الانحراف المعيارى للمجتمع .

المعاينة من مجتمع غير عاوى

ويمقتضى نظرية الحد المركزى The Central Limit treorem نجد أنه حتى بالنسبة للعينات التى يتم إختيارها من مجتمع لا يخضع للتوزيع العاوى فإن الوسط الحسابى لتوزيع المعاينة = الوسط الحسابى للمجتمع الأسمى وذلك مهما كان حجم العينة .

وأما فيما يتعلق بنوعية توزيع المعاينة فقد ثبت أنه مع زيادة حجم العينة يقترب توزيع المعاينة من التوزيع العاوى وذلك بغض النظر عن خضوع أو عدم

خضوع المجتمع الاصلى للتوزيع العادى .

وفى الفصل القادم سنتعرض لإستخدام العينات وفى تقدير المقاييس
الأساسيه للمجتمع نفسه سواء تعلق الأمر بالوسط الحسابى أو الإنحراف المعيارى
أو النسب .

الفصل السادس

التقدير

الفصل السادس

التقدير Estimation

١- تقدير الوسط الحسابى للمجتمع بفرض أننا نعرف الانحراف المعيارى للمجتمع :

نفرض أننا نعرف أن الانحراف المعيارى لمتوسط دخل الفرد فى أحد الأحياء = ١٥٠ جنيه شهريا

وبفرض أننا أخذنا عينه من ٤٩ مواطن هذا الحي فوجدنا أن متوسط دخل الفرد = ٥٠٠ جنيه شهريا أى أن $\bar{S} = \frac{\text{مجموع إجمالى دخول جميع أفراد العينة}}{\text{عدد الأفراد}}$

والآن هل يمكن الإعتماد على الوسط الحسابى للعينه وهو ٥٠٠ جنيه شهريا ونقول أنه يساوى الوسط الحسابى للمجتمع - بديهى أننا لا نستطيع أن نؤكد ذلك، فقد سبق أن أوضحنا أن كل عينه لها وسط حسابى يختلف عن العينات الأخرى ويختلف عن المجتمع ولو تعادل الوسط الحسابى للعينه مع الوسط الحسابى لكان ذلك بمحض الصدفة ولهذا فإن الخطأ هنا (أى الخطأ فى الإعتماد على قيمة \bar{S} لتقدير قيمة μ)

$$= \bar{S} - \mu$$

ولكن المشكلة أننا لا نعرف قيمة μ بل نسعى إلى تقديرها ولهذا ستتعتمد على توزيع المعاينة لمعرفة الخطأ فى التقدير .

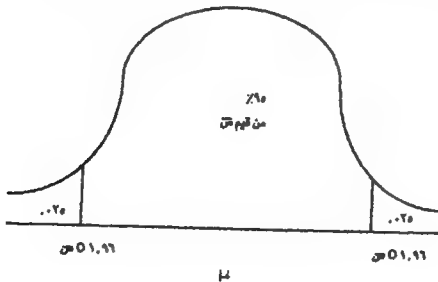
سبق أن أوضحنا أن توزيع المعاينة يقرب من التوزيع الطبيعى إذا كان حجم العينه كبير يساوى أو أكبر من ٣٠ مفردة وأن لهذا التوزيع وسط حسابى = الوسط الحسابى للمجتمع وخطأ معيارى $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ويتطبيق ذلك على المثال السابق نجد

أن الخطأ المعياري لتوزيع المعاينة $\sigma_s = \frac{10}{\sqrt{49}} = 1.42$ جنيهها

وسبق أن أوضحنا عند دراستنا للتوزيع العادي أن ٦٨,٢٦ ٪ من قيم المتغير العشوائى س تختلف بالزيادة أو النقص عن الوسط الحسابى للتوزيع بمقدار وحده معياريه واحده وأن ٩٥,٤ ٪ من قيم المتغيرات العشوائى س تختلف عن الوسط الحسابى بمقدار وحدتى خطأ معيارى وهكذا .

وينطبق ذلك على توزيع المعاينة (والذى يقرب من التوزيع العادى) نجد أن ٦٨,٢ ٪ من الأوساط الحسابية للعينات تختلف عن الوسط الحسابى لتوزيع المعاينة (والذى هو الوسط الحسابى للمجتمع) فى حدود وحدة خطأ معيارى واحد ، ٩٥,٤ ٪ من الأوساط الحسابية تختلف فى حدود وحدتين خطأ معيارى وهكذا .

كما أنه يلاحظ أن ٩٥ ٪ من العينات تنحرف بالزيادة أو النقص بمقدار ١,٩٦ وحدة خطأ معيارى عن الوسط الحسابى كما يتضح من الرسم التالى :



وينطبق ذلك مثالنا هذا حيث وحدة الخطأ المعياري الواحدة = ٢١,٤ جنيها فإننا نستطيع أن نقول أن ٩٥٪ من العينات ينحرف وسطها الحسابي عن الوسط الحسابي للمجتمع بمقدار ١,٩٦ وحده خطأ معياري $\times ٢١,٤$ جنيها
 $= ١١,٩٤٤$ جنيها = ٤٢ جنيها تقريبا .

أو بعبارة أخرى نستطيع أن نقول أن ٩٥٪ من الأوساط الحسابية للعينات تقع في حدود ± ٤٢ جنيها من الوسط الحسابي للمجتمع - أى أن كل هذه العينات ستظهر من الخطأ مالا يتجاوز ± ٤٢ وهذا لا ينفي أن هناك ٥٪ من العينات وسطها الحسابي يزيد أو ينقص عن الوسط الحسابي للمجتمع بأكثر من ٤٢ جنيها وكذلك من الممكن أن تشير إلى أن ٩٩٪ من الأوساط الحسابية للعينات تزيد أو تنقص عن الوسط الحسابي للمجتمع في حدود ٢,٥٨ وحدة خطأ معياري أو في حدود $\pm ٢,٥٨ \times ٢١,٤ = ٥٥,٢$ جنيها

أى أننا نستطيع أن نقرر بإحتمال قدره ٩٩٪ أن الخطأ وفي التقدير لن يتجاوز $\pm ٥٥,٢$ إذا إعتدنا على الوسط الحسابي للعينه وهو ٥٠٠ جنيها شهريا لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع وهذا يعنى أن ٥٥,٢ هي الحد الأقصى للخطأ في التقدير والآن عندما يكون هناك إحتمال قدره ٩٥٪ أو ٩٩٪ فإن المتمم للواحد الصحيح سنطلق عليه "أى أن $\alpha = ٠,٠٥$, $٠,٠١$ على الترتيب .

وعلى ذلك يكون الاحتمال نفسه $= ١ - \alpha$

وعلى ذلك إذا إفترضنا أننا نرغب في المثال السابق في الحصول على أقصى خطأ في التقدير بفرض أن $\alpha = ٠,٢$ فإننا نتبع الخطوات التالية :-

$$\alpha = ٠,٢ \quad , \quad \frac{\alpha}{2} = ٠,١$$

الإحتمال = $0.5 - 0.1 = 0.49$.

قيمة Z التي تقابل إحصائياً قدره 0.49 من جدول التوزيع المعياري العادي $= 2.33$ وحدة خطأ معياري ، الحد الأقصى للخطأ في التقدير بدلالة القيم المطلقة $= 2.33 \times 21.4 = 49.86$ جنيهاً

مما سبق يتضح أنه كلما زاد الإحتمال زادت قيمة الخطأ في التقدير .

فعندما كان الإحتمال 90% كان الحد الأقصى للخطأ في التقدير 1.96 وحدة خطأ معياري ، 42 جنيهاً بالأرقام المطلقة وعندما كان الإحتمال 98% كان الحد الأقصى للخطأ في التقدير 2.33 خطأ معياري ، 49.86 جنيهاً بالأرقام المطلقة وعندما كان الإحتمال 99% كان الخطأ في التقدير 2.58 وحدة خطأ معياري ، 55.2 جنيهاً .

الحد الأدنى والأقصى للتقدير

في المثال السابق أستطعنا أن نعتمد على الوسط الحسابي للعينة لتقدير الوسط الحسابي للمجتمع وبدرجة خطأ معينة وبإحتمال معين ويسمى هذا بالتقدير عند نقطة معينة Point Estimate ولكن من الممكن أن نضع ما نصل إليه في صورة أخرى فمثلاً في المثال السابق أوضحنا أننا نقدر الوسط الحسابي لدخل الفرد في المجتمع بمبلغ 500 جنيه ونجد أقصى للخطأ ± 42 وبإحتمال قدره 90% وبدلاً من ذلك فإنه من الممكن عرض هذا التقدير في صورة فتسرة Interval Estimate أى يوضع حد أدنى للتقدير $= 500 - 42 = 458$ جنيهاً وحد أقصى للتقدير $= 500 + 42 = 542$ جنيهاً ونقول أننا نقدر الحد الأدنى لمتوسط دخل الفرد في المجتمع بمبلغ 458 والحد الأقصى بمبلغ 542 جنيه وبإحتمال قدره 90%

وهكذا كلما زادت قيمة الإحتمال وقل الفرق بين الحد الأدنى والحد الأقصى للتقدير كلما دل ذلك على سلامة التقدير والعكس صحيح .

ونستطيع أن نؤكد هذه الحقيقة بزيادة حجم العينة في المثال السابق من ٤٩ فرد إلى ٤٠٠ فرد ونرى أثر ذلك على تقدير الحد الأدنى والحد الأقصى لدخل الفرد في المجتمع في إطار احتمالات مختلفة .

$$\text{الخطأ المعياري الجديد} = \frac{10}{\sqrt{400}} = ٧,٥ \text{ جنيه}$$

الحد الأقصى للخطأ في التقدير باحتمال قدره ٩٥٪ = ١,٩٦ وحده خطأ معياري وبالقيم المطلقة = ١,٩٦ × ٧,٥ = ١٤,٧ جنيه بدلا من ٤٢ جنيه عندما كان حجم العينة = ٤٩ وإذا كان الإحتمال ٩٩٪ يصبح أقصى خطأ في التقدير بالقيم المطلقة = ٢,٥٨ × ٧,٥ = ١٩,٣ جنيه بدلا من ٥٥,٢ جنيه عند حجم عينة من ٤٩ فرد .

وكذلك إذا كان الاحتمال ٩٨٪ فإن أقصى خطأ في التقدير بالقيم المطلقة = ٢,٣٣ × ٧,٥ = ١٧,٥ بدلا من ٤٩,٨ جنيه

مما سبق نستطيع أن نستنتج أن تقدير الوسط الحسابي في المجتمع يتوقف على :-

الانحراف المعياري للمجتمع = σ

حجم العينة = n

قيمة Z التي تجعل قمة كل طرف = $\frac{\alpha}{2}$

ولذلك يمكن أن نقول $Z \propto \frac{1}{\sqrt{n}}$

الوسط الحسابى للعينة \bar{x}

ولهذا نقول أن

$$\begin{aligned} \text{الوسط الحسابى للمجتمع} = \bar{x} \pm Z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \bar{m} = \bar{x} \pm \frac{Z \alpha}{z} \times \sqrt{\frac{\sigma}{n}} \end{aligned}$$

وعلى ذلك نكون قد افترضنا معرفة الانحراف المعيارى للمجتمع ولكن ما هو الحال إذا كانت σ غير معروفة ؟

تقدير النسبة فى المجتمع من واقع النسبة فى العينة :

حتى يمكن فهم هذا الموضوع نفترض أننا نقيس نسبة التلف فى إنتاج أحد المصانع - لا شك فى أن هناك نسبة تلف للمجتمع كله وسنفترض أن هذه النسبة $m =$

فإذا أخذنا أى عينة من إنتاج المصنع فإن كل عينة سنجد بها نسبة تلف تختلف عن الأخرى وتسمى كل منها \bar{m} ولا شك فى أن الوسط الحسابى لكل قيم \bar{m} = النسبة فى المجتمع وهى m

فإذا كانت نسبة التلف على مستوى المجتمع كله $m = 0.2$ ،

أى أن $m = 0.2$ ،

فإن الوسط الحسابى لنسب التلف فى كل العينات الممكنة = أيضا 0.2 ،

وإذا كان الوسط الحسابى لكل نسب التلف من واقع العينات $m =$ أى نسبة التلف فى المجتمع فإن الانحراف المعيارى لهذا التوزيع كما يلى :-

$$\sigma = \sqrt{\frac{c(c-1)}{n}} \quad . \quad \text{إذا كان المجتمع غير محدود}$$

$$\text{كما أن } \sigma = \sqrt{\frac{c(c-1)}{n}} \times \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \quad \text{إذا كان المجتمع محدوداً}$$

وجدير بالذكر أن توزيع المعاينة للنسب \hat{p} يمكن تقريبه لتوزيع احتمالي عادي عندما يكون حجم العينة كبيراً .

ويرى بعض الإحصائيين أنه يمكن تحقيق ذلك بتوافر شرطين :-

$$(١) \text{ أن يكون } n \times p \geq 5$$

$$(٢) \text{ أن يكون } n \times (p-1) \geq 5$$

وسبق أن تحدثنا عن التوزيع ثنائي الحدين وهو التوزيع المناسب للتوزيع الاحتمالي للنسب - كما بيننا أنه يمكن تقريب التوزيع ثنائي الحدين للتوزيع العادي . وسنطبق ذلك على النسب .

$$n \times p = c \quad .$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{c \times n}{(c-1) \times c \times n}}$$

هذا عند التحدث عن المتوسط بالأعداد وتحويل الأعداد إلى نسب نقسم كل من الوسط الحسابي والانحراف المعياري على n

$$\text{فيصبح المتوسط أى النسبة} = \frac{c \times n}{n} = c$$

$$\text{ويصبح الانحراف المعياري} = \sqrt{\frac{c \times n}{(c-1) \times c \times n}}$$

$$= \sqrt{\frac{c}{(c-1) \times c}}$$

$$\text{أى هنا} = \sqrt{\frac{c}{(c-1) \times c}}$$

وهذه تسمى الخطأ المعياري للنسبة

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

. \hat{p}^2 م نسبة المجتمع ويمكن إستخدام ذلك على الوجه الاكمل كما

يتضح من المثال التالى :

يريد أحد المرشحين لإنتخابات مجلس الشعب فى إحدى دوائر الشرقية تقدير إحتمال نجاحه فى الانتخابات أخذ عينه من ٤٠٠ ناخب فكانت نسبة الموافقين على إنتخابه = ٧٠, أى ٧٠٪ أوجد بدرجة ثقة ٩٩٪ تقريوك للحد الأدنى والحد الأعلى لنسبة من ينتخبون هذا المرشح .

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.7 \times 0.3}{400}} = 0.0229$$

عندما درجة الثقة = ٩٩٪

الاحتمال = ٤٩٥ ,

$$Z = 2.58$$

النسبة المطلوبة = $0.7 \pm 2.58 \times 0.0229 = 0.7 \pm 0.059$

أى أن الحد الأدنى لنسبة الموافقين ٦٤,١٪ والحد الأقصى = ٧٥,٩٪

وفى المثال السابق ما هو تقديرك للحد الأدنى والأعلى لنسبة الموافقين إذا كانت درجة الثقة ٩٥٪ .

عندما درجة الثقة = ٩٥ ,

الاحتمال = ٤٧٥ ,

$$1,96 = Z.$$

النسبة المتوقعة للموافقين على انتخاب المرشح

$$,70 \pm 1,96 \times ,0229 =$$

$$,70 \pm ,045 =$$

الحد الأدنى = ٦٥,٥٪ والحد الأعلى = ٧٤,٥٪

في المثال السابق ما تقديرك للحد الأدنى والأعلى بدرجة ثقة ٩٩٪ إذا كان حجم العينة = ١٥٠

$$\text{في هذه الحالة } \sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{,3 \times ,7}{150}} = ,0374$$

$$\text{نسبة المجتمع } ,70 \pm ,0374 \times 2,58 = ,70 \pm ,097 =$$

الحد الأدنى = ٦٠,٣٪ والحد الأقصى = ٧٩,٧٪

وبلاحظ زيادة الخطأ في التقدير نتيجة لإنخفاض حجم العينة من ٤٠٠ إلى ١٥٠ عند نفس نسبة الاحتمال وهي ٩٩٪.

تقدير الوسط الحسابي للمجتمع بفرض أن σ غير معروفة

الحالة الأولى : إذا كان حجم العينة كبيراً (٣٠ أو أكثر)

في هذه الحالة تستخدم S (الانحراف المعياري للعينة) بدلا من σ وتطبق نفس القواعد السابقة أي أن الوسط الحسابي للمجتمع

$$\bar{S} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$M = \bar{X} \pm \frac{Z_{\alpha/2}}{\sqrt{z}} \times \frac{S}{\sqrt{n}}$$

الحالة الثانية : إذا كان حجم العينة صغيرا (أقل من ٣٠)

فى هذه الحالة لن نستخدم التوزيع العادى ولكن نستخدم توزيعا آخر يسمى t distribution والذي جاء نتيجة لبحث عالم يدعى جوسيت ونشره لأسباب خاصة بأسم Student

وهذا التوزيع يلاحظ أنه يكون أننى من التوزيع العادى عند الوسط الحسابى وأعلى من التوزيع العادى عند طرفى المنحنى ولكن كل من التوزيعين يتميزان بأنهما ينقسمان إلى قسمين متماثلين وإن كان منحنى توزيع t له قمة منخفضة عن المنحنى العادى ولكن كلما زاد حجم العينة كلما تقارب شكل المنحنيين.

ويمكن الكشف فى جدول t بالإعتماد على درجات الحرية والتي تساوى (ن-١) أى عدد مفردات العينة - ١ وكذلك α فمثلا إذا كان مستوى الثقة = ٩٥٪ فإن $\alpha = ٠.٠٥$ وكان عدد مفردات العينة = ١٦ فإن درجات الحرية = ١٥ - نكشف فى جدول t تحت رقم ٠.٠٥ وأمام رقم ١٥ نجد أن الاحتمال = ٢,١٣ وجدير بالذكر أنه كلما زادت عدد مفردات العينة أقترب الاحتمال من الاحتمال الخاص بالتوزيع الطبيعى (مثال عند درجة ١٢٠ الاحتمال = ١,٩٨ يقابل ١,٩٦ للتوزيع الطبيعى.

وسنوضح كيفية استخدام توزيع t عدد من الأمثلة العملية :

مثال (١)

في جولة لأحد مفتش وزارة التموين على أحد المخازن أخذ عينة من ٢٠ رغيف وقام بحساب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لهذه العينة فوجد أن الوسط الحسابي لوزن الرغيف = ١٤٠ جرام والانحراف المعياري = ١٨ جرام ما هو أقصى خطأ في تقدير متوسط وزن الرغيف لإنتاج المخبز كله على أساس متوسط وزن الرغيف من واقع العينة وما هو الحد الأدنى والحد الأقصى لمتوسط وزن الرغيف في المجتمع بدرجة ثقة ٩٥ %

$$\alpha = 1 - 0.95 = 0.05$$

عدد مفردات العينة = ٢٠

درجات الحرية = ١٩

حيث أن عدد مفردات العينة أصغر من ٢٠ والانحراف المعياري للمجتمع غير معروف - نستخدم توزيع t

أقصى خطأ في التقدير = عدد وحدات الخطأ المعياري \times قيمة وحدة الخطأ المعياري

وحدة الخطأ المعياري الواحدة =

$$\frac{s}{\sqrt{n}} \text{ أى } \frac{18}{\sqrt{20}} = 4.02$$

وبالكشف في الجداول عن قيمة t أمام درجات حرية ١٩ وتحت ٠.٠٥ نجد أن قيمة $t = 2.092$

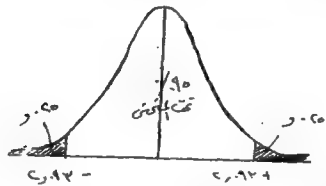
الحد الأقصى للخطأ = ٢,٠٩٣ وحده خطأ معيارى

$$\text{أو} = ٢,٠٩٣ \times ٤,٠٢٥ = ٨,٤٢ \text{ جرام}$$

الحد الأدنى والأقصى لتوسط وزن الرغيف فى المجتمع = ٨,٤٢ ± ١٤٠

= ١٣١,٦ — ١٤٨,٤ جرام بدرجة ثقة ٩٥ ٪ أى أن ٥ ٪ فقط على

الطرفين الإيمن والإيسر كما يتضح من الرسم التالى :



تقدير النسبة فى المجتمع من واقع عينة صغيرة

إذا كانت النسبة من واقع العينة الكبيرة = \hat{C} مثلاً فإن النسبة فى المجتمع

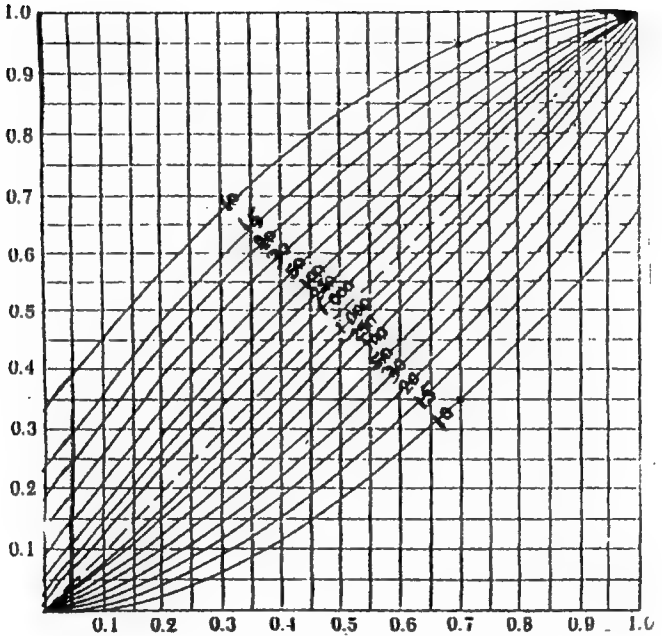
يمكن تقديرها على أساس \hat{C} وأن أقصى خطأ فى تقدير النسبة = $\frac{\sqrt{C(1-C)}}{\sqrt{n}} \times Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$$\text{وفى هذه الحالة نقول أن } C = \hat{C} \pm \frac{\sqrt{C(1-C)}}{\sqrt{n}} \times Z_{\frac{\alpha}{2}}$$

وعندما تكون العينة أصغر من ١٠٠ فإن الإحصائيين يعتمدون على التوزيع

ثنائى الحدين لتحديد الحد الأدنى والحد الأقصى لتقدير النسبة فى المجتمع ^(١)

ويمكن الاعتماد على الجدول الآتى والذي يمكن إستخدامه بسهولة :



النسبة من واقع العينة = ٧، درجة الثقة = ٩٥.

عدد مفردات العينة = ١٠

في هذه الحالة نختار ٧، على المحور الأفقي ثم نتجه مع الخط رأسياً حتى يتقاطع مع منحنى رقم ١٠ من أسفل إلى أعلى نجد أن النسبة = ٣٥، (الحد

الأنسى (ثم بتقاطع مع منحني رقم ١٠ مرة ثانية عند ٩٥ .) لأن هذا هو الذي يمثل عدد مفردات العينة (١٠)

أى أن الحد الأدنى للنسبة في المجتمع = ٢٥ ، والحد الأقصى ٩٥ ، وإذا أردنا أن نقارن بين النتائج السابقة ، وبين ما يمكن أن نحصل عليه باستخدام التوزيع العادي فنجد أن :-

$$\begin{aligned} \frac{(\bar{c}-1)}{n} \sqrt{\bar{c}} \times Z_{\alpha} &= \bar{c} \pm \bar{c} \\ \frac{.3 \times .7}{1.0} \sqrt{.7} &= 1.96 \pm .7 = \\ &= .284 \pm .7 = \\ .984 &\geq c \geq .416 \end{aligned}$$

تحديد حجم العينة

الأمر هنا يتعلق بتحديد حجم العينة المناسب والذي يجد الحد الأقصى للخطأ عند الاعتماد على متوسط العينة كأساس لتقدير متوسط المجتمع وبدرجة ثقة معينة .

فمثلاً إذا افترضنا أن الانحراف المعياري لعمر الفرد في كلية الإدارة = ٣ سنوات على مستوى مجتمع الكلية كله ما هو حجم العينة الواجب أخذها لكي لا يتجاوز الحد الأقصى للخطأ في التقدير ٦٤٥ ر سنة بدرجة ثقة ٩٩٪ .

الحل :

في هذه الحالة الخطأ في التقدير = عدد وحدات الخطأ المعياري

× قيمة وحدة الخطأ المعياري

$$\frac{z}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \text{الخطأ المعياري}$$

الحصول على عدد وحدات الخطأ المعياري أى قيمة Z

$$\text{الاحتمال} = ٩٩ \div ٢ = ٤٩٥ ,$$

$$\text{قيمة } Z = ٢,٥٨$$

وهذا الرقم هو أقصى خطأ بدلالة الوحدات الخاصة بالخطأ المعياري

أقصى خطأ بدلالة الوحدات المطلقة

$$= \frac{٢}{\sqrt{n}} \times ٢,٥٨ \text{ سنه}$$

$$\therefore ٦٤٥ , \text{ سنه} = \frac{٢}{\sqrt{n}} \times ٢,٥٨$$

$$\therefore ٦٤٥ , \sqrt{n} = ٢,٥٨ \times ٣ = ٧,٧٤$$

$$\therefore \sqrt{n} = \frac{٧,٧٤}{٦٤٥} = ١٢$$

$$n = ١٤٤$$

$$n = \left(\frac{\sigma \times Z}{E} \right)^2 \text{ ويمكن أن تصل إلى القانون الآتي}$$

أى أن

$$n = \left(\frac{\sigma \times Z}{E} \right)^2$$

حيث E أو ع عبارة عن أقصى خطأ مسموح به بدلالة الأرقام المطلقة ، 2 عدد وحدات الخطأ المعياري طبقاً لدرجة الثقة المطلوبة ، σ الإنحراف المعياري للمجتمع .

ويعتبر القانون على المثال السابق نجد أن

$$n = \left(\frac{٢ \times ٢,٥٨}{٠,٦٤٥} \right)^2 = \left(\frac{٧,٧٤}{٠,٦٤٥} \right)^2$$

$$= ١٤٤$$

وهي نفس النتيجة التي وصلنا لها .

سؤال :

أوجد حجم العينة الواجب أخذها من مجتمع انحرافه المعياري = ٥٠ جنيه شهريا إذا أردنا ألا يتجاوز الحد الأقصى للخطأ في التقدير ١٠ جنيه بدرجة ثقة ٩٩٪ (لأقرب عشرة أرقام)

$$\begin{aligned} E &= Z_{\alpha} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{القانون} \\ n &= \left(\frac{\sigma \times Z_{\alpha}}{E} \right)^2 \\ &= \text{باللغة العربية} \end{aligned}$$

$$n = \left(\frac{Z_{\alpha} \times \sigma}{E} \right)^2$$

$$167 = 166,4$$

ومنا نقول ١٧٠ لأقرب عشرة أرقام

توزيع ثنائي الحدين حيث n = عدد مرات إجراء التجربة ، x = عدد حالات النجاح
 p = احتمال النجاح في المرة الواحدة

Table 1 Binomial Probabilities— $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$

n	x	p									
		0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8
1	0	0.900	0.800	0.750	0.700	0.600	0.500	0.400	0.300	0.250	0.200
1	1	0.100	0.200	0.250	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.750	0.800
2	0	0.810	0.640	0.563	0.490	0.360	0.250	0.160	0.090	0.063	0.040
2	1	0.180	0.320	0.375	0.420	0.480	0.500	0.480	0.420	0.375	0.320
2	2	0.010	0.040	0.063	0.090	0.160	0.250	0.360	0.490	0.563	0.640
3	0	0.729	0.512	0.422	0.343	0.216	0.125	0.064	0.027	0.016	0.008
3	1	0.243	0.384	0.422	0.441	0.432	0.375	0.288	0.189	0.141	0.096
3	2	0.027	0.096	0.141	0.198	0.288	0.375	0.432	0.441	0.422	0.384
3	3	0.001	0.008	0.016	0.027	0.064	0.125	0.216	0.343	0.422	0.512
4	0	0.656	0.410	0.316	0.240	0.130	0.063	0.026	0.008	0.004	0.002
4	1	0.292	0.410	0.422	0.412	0.346	0.250	0.154	0.076	0.047	0.026
4	2	0.076	0.154	0.211	0.305	0.346	0.375	0.346	0.266	0.211	0.154
4	3	0.004	0.026	0.047	0.076	0.154	0.250	0.346	0.412	0.422	0.410
4	4	0.000	0.002	0.004	0.008	0.026	0.063	0.130	0.240	0.316	0.410
5	0	0.590	0.328	0.237	0.168	0.078	0.031	0.010	0.002	0.001	0.000
5	1	0.378	0.410	0.396	0.360	0.259	0.156	0.077	0.028	0.015	0.006
5	2	0.073	0.205	0.264	0.309	0.346	0.312	0.230	0.132	0.088	0.051
5	3	0.008	0.051	0.088	0.132	0.230	0.312	0.346	0.309	0.264	0.205
5	4	0.000	0.006	0.015	0.028	0.077	0.156	0.259	0.360	0.396	0.410
5	5	0.000	0.000	0.001	0.002	0.010	0.031	0.078	0.168	0.237	0.328
6	0	0.531	0.262	0.178	0.118	0.047	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000
6	1	0.354	0.393	0.356	0.303	0.187	0.094	0.037	0.010	0.004	0.002
6	2	0.098	0.246	0.297	0.324	0.311	0.234	0.134	0.060	0.033	0.015
6	3	0.015	0.082	0.132	0.185	0.276	0.313	0.276	0.15	0.132	0.082
6	4	0.001	0.015	0.033	0.060	0.134	0.234	0.311	0.313	0.297	0.246
6	5	0.000	0.002	0.004	0.010	0.037	0.094	0.187	0.303	0.356	0.393
6	6	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.047	0.118	0.178	0.262
7	0	0.478	0.210	0.133	0.082	0.028	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000
7	1	0.372	0.367	0.311	0.247	0.131	0.055	0.017	0.004	0.001	0.000
7	2	0.134	0.275	0.311	0.318	0.261	0.164	0.077	0.027	0.012	0.004
7	3	0.023	0.115	0.173	0.227	0.290	0.273	0.194	0.097	0.058	0.029
7	4	0.003	0.029	0.058	0.097	0.194	0.273	0.290	0.227	0.173	0.115
7	5	0.000	0.004	0.012	0.025	0.077	0.164	0.261	0.311	0.311	0.275
7	6	0.000	0.000	0.001	0.004	0.017	0.055	0.131	0.247	0.311	0.367
7	7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.008	0.028	0.082	0.133	0.210

Table 1 (continued)

		P										
n	x	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
8	0	0.430	0.168	0.100	0.058	0.017	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.303	0.336	0.267	0.188	0.090	0.031	0.008	0.001	0.000	0.000	0.000
	2	0.149	0.294	0.311	0.296	0.209	0.109	0.041	0.010	0.004	0.001	0.000
	3	0.033	0.147	0.308	0.254	0.179	0.119	0.124	0.047	0.023	0.009	0.000
	4	0.005	0.046	0.087	0.136	0.232	0.273	0.232	0.136	0.087	0.046	0.005
	5	0.000	0.009	0.023	0.047	0.124	0.219	0.279	0.254	0.208	0.147	0.033
	6	0.000	0.001	0.004	0.018	0.041	0.109	0.209	0.296	0.311	0.294	0.149
	7	0.000	0.000	0.000	0.001	0.008	0.031	0.090	0.198	0.267	0.336	0.393
	8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.004	0.017	0.058	0.100	0.168	0.240
9	0	0.367	0.134	0.075	0.040	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.307	0.302	0.225	0.156	0.060	0.018	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.172	0.302	0.300	0.267	0.161	0.070	0.021	0.004	0.001	0.000	0.000
	3	0.045	0.176	0.234	0.267	0.251	0.164	0.074	0.021	0.009	0.003	0.000
	4	0.007	0.066	0.117	0.173	0.251	0.246	0.167	0.074	0.039	0.017	0.001
	5	0.001	0.017	0.039	0.074	0.167	0.246	0.251	0.172	0.117	0.066	0.047
	6	0.000	0.003	0.009	0.021	0.074	0.164	0.251	0.267	0.234	0.176	0.045
	7	0.000	0.000	0.001	0.004	0.021	0.070	0.161	0.267	0.300	0.302	0.172
	8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.018	0.060	0.156	0.225	0.302	0.367
10	0	0.300	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.010	0.040	0.275	0.134	0.387
	1	0.343	0.167	0.096	0.038	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.367	0.268	0.188	0.121	0.040	0.010	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.194	0.302	0.282	0.233	0.121	0.044	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000
	4	0.057	0.201	0.250	0.267	0.215	0.117	0.042	0.009	0.003	0.001	0.000
	5	0.011	0.088	0.146	0.200	0.251	0.205	0.111	0.057	0.016	0.006	0.000
	6	0.001	0.026	0.050	0.103	0.205	0.246	0.201	0.103	0.050	0.026	0.001
	7	0.000	0.006	0.016	0.037	0.111	0.205	0.251	0.200	0.146	0.088	0.011
	8	0.000	0.001	0.003	0.009	0.042	0.117	0.215	0.267	0.250	0.201	0.057
11	0	0.000	0.000	0.000	0.001	0.011	0.044	0.121	0.233	0.282	0.302	0.194
	1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
12	0	0.314	0.086	0.042	0.018	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.304	0.236	0.155	0.095	0.027	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.213	0.295	0.250	0.200	0.089	0.027	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.071	0.221	0.258	0.257	0.177	0.081	0.025	0.004	0.001	0.000	0.000
	4	0.006	0.111	0.172	0.220	0.236	0.161	0.070	0.017	0.006	0.002	0.000
	5	0.002	0.039	0.080	0.132	0.221	0.226	0.147	0.057	0.027	0.010	0.003
	6	0.000	0.000	0.027	0.057	0.147	0.226	0.221	0.132	0.080	0.039	0.002
	7	0.000	0.000	0.006	0.017	0.070	0.161	0.236	0.220	0.172	0.111	0.014
	8	0.000	0.000	0.001	0.004	0.025	0.081	0.177	0.257	0.258	0.221	0.071
13	0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.027	0.089	0.200	0.250	0.275	0.213
	1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.005	0.027	0.095	0.155	0.236	0.264
	2	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.004	0.020	0.042	0.086	0.134	0.214

Table 1 (continued)

		p										
n	x	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
12	0	0.282	0.069	0.032	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.377	0.206	0.127	0.071	0.017	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.230	0.283	0.232	0.168	0.064	0.016	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.085	0.236	0.258	0.240	0.142	0.054	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000
	4	0.021	0.133	0.194	0.231	0.213	0.121	0.042	0.008	0.002	0.001	0.000
	5	0.004	0.053	0.103	0.158	0.227	0.193	0.101	0.029	0.011	0.003	0.000
	6	0.000	0.016	0.040	0.079	0.177	0.226	0.177	0.079	0.040	0.016	0.000
	7	0.000	0.003	0.011	0.029	0.101	0.193	0.227	0.158	0.103	0.053	0.004
	8	0.000	0.001	0.002	0.008	0.042	0.121	0.213	0.231	0.194	0.133	0.021
	9	0.000	0.000	0.000	0.001	0.012	0.054	0.142	0.240	0.258	0.236	0.085
	10	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.016	0.064	0.168	0.232	0.283	0.230
	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.017	0.071	0.127	0.206	0.282
	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.014	0.032	0.069	0.282
13	0	0.254	0.055	0.024	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.367	0.179	0.103	0.054	0.011	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.245	0.268	0.206	0.139	0.045	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.100	0.246	0.252	0.218	0.111	0.035	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000
	4	0.028	0.154	0.210	0.234	0.184	0.087	0.024	0.003	0.001	0.000	0.000
	5	0.006	0.069	0.126	0.180	0.221	0.157	0.066	0.014	0.005	0.001	0.000
	6	0.001	0.023	0.056	0.103	0.197	0.209	0.131	0.044	0.019	0.006	0.000
	7	0.000	0.005	0.019	0.044	0.131	0.209	0.197	0.103	0.056	0.023	0.001
	8	0.000	0.001	0.005	0.014	0.066	0.157	0.221	0.180	0.126	0.069	0.006
	9	0.000	0.000	0.001	0.003	0.024	0.087	0.184	0.234	0.210	0.154	0.028
	10	0.000	0.000	0.000	0.001	0.006	0.035	0.111	0.218	0.252	0.246	0.100
	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.010	0.045	0.139	0.206	0.268	0.245
	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.011	0.054	0.103	0.179	0.267
	13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.010	0.024	0.055	0.254
14	0	0.229	0.044	0.018	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.356	0.154	0.083	0.042	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.257	0.250	0.180	0.113	0.032	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.114	0.250	0.240	0.194	0.085	0.022	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.035	0.172	0.220	0.229	0.155	0.061	0.014	0.001	0.000	0.000	0.000
	5	0.008	0.086	0.147	0.196	0.207	0.122	0.041	0.007	0.002	0.000	0.000
	6	0.001	0.032	0.073	0.126	0.207	0.183	0.092	0.023	0.008	0.002	0.000
	7	0.000	0.009	0.028	0.062	0.157	0.209	0.157	0.062	0.028	0.009	0.000
	8	0.000	0.002	0.008	0.023	0.092	0.183	0.207	0.126	0.073	0.032	0.001
	9	0.000	0.000	0.002	0.007	0.041	0.122	0.207	0.196	0.147	0.108	0.008
	10	0.000	0.000	0.000	0.001	0.014	0.061	0.155	0.229	0.220	0.172	0.045
	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.022	0.085	0.194	0.240	0.250	0.114
	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.006	0.032	0.113	0.180	0.250	0.257
	13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.017	0.044	0.083	0.154	0.256
	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.011	0.024	0.055	0.108	0.229

Table 1 (continued)

		P										
n	x	0.1	0.2	0.25	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.75	0.8	0.9
15	0	0.286	0.035	0.013	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.143	0.132	0.087	0.051	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.267	0.234	0.196	0.092	0.022	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.129	0.240	0.225	0.170	0.065	0.004	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.014	0.100	0.225	0.249	0.177	0.042	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000
	5	0.000	0.002	0.165	0.206	0.186	0.092	0.020	0.003	0.000	0.000	0.000
	6	0.002	0.043	0.092	0.167	0.207	0.155	0.064	0.012	0.003	0.001	0.000
	7	0.000	0.004	0.039	0.080	0.177	0.196	0.110	0.035	0.013	0.005	0.000
	8	0.000	0.005	0.013	0.035	0.100	0.196	0.177	0.081	0.030	0.014	0.000
	9	0.000	0.004	0.003	0.012	0.064	0.153	0.207	0.147	0.082	0.043	0.002
	10	0.000	0.000	0.001	0.003	0.034	0.092	0.186	0.206	0.165	0.103	0.010
	11	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.042	0.127	0.219	0.225	0.186	0.043
	12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.002	0.014	0.063	0.170	0.225	0.250	0.129
	13	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.022	0.092	0.156	0.231	0.267
	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.031	0.067	0.132	0.243
	15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.013	0.025	0.206
20	0	0.122	0.002	0.003	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.270	0.056	0.021	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	2	0.205	0.137	0.067	0.030	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	3	0.150	0.205	0.134	0.072	0.012	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	4	0.030	0.210	0.250	0.130	0.025	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	5	0.031	0.175	0.202	0.179	0.075	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	6	0.009	0.109	0.169	0.192	0.134	0.037	0.005	0.000	0.000	0.000	0.000
	7	0.002	0.055	0.112	0.164	0.266	0.274	0.015	0.001	0.000	0.000	0.000
	8	0.000	0.022	0.061	0.114	0.180	0.120	0.035	0.004	0.001	0.000	0.000
	9	0.000	0.007	0.027	0.065	0.160	0.160	0.071	0.012	0.003	0.000	0.000
	10	0.000	0.002	0.000	0.034	0.117	0.176	0.117	0.031	0.010	0.002	0.000
	11	0.000	0.000	0.003	0.012	0.071	0.160	0.160	0.065	0.027	0.007	0.000
	12	0.000	0.000	0.001	0.004	0.035	0.130	0.180	0.114	0.061	0.022	0.000
	13	0.000	0.000	0.000	0.004	0.015	0.074	0.166	0.164	0.112	0.055	0.002
	14	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.057	0.124	0.192	0.169	0.109	0.009
	15	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.015	0.075	0.179	0.202	0.175	0.052
	16	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.005	0.035	0.130	0.190	0.210	0.090
	17	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.012	0.072	0.154	0.205	0.190
	18	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.020	0.067	0.157	0.205
	19	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.007	0.021	0.050	0.170
	20	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.003	0.003	0.012	0.122

توزيع بواسون حيث الوسط الحسابي = μ ، العنصر في العمود = x

TABLE OF POISSON PROBABILITIES

For a given value of μ , entry indicates the probability of obtaining a specified value of X

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7203	.6103	.4980	.3950	.2980	.2071	.1328	.0773
1	.0806	.1837	.2707	.3466	.4130	.4701	.5190	.5619	.6000	.6350
2	.0045	.0164	.0360	.0630	.0973	.1277	.1538	.1759	.1940	.2080
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0198	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0003	.0007	.0014	.0023	.0035	.0049	.0064	.0081
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0018	.0025
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

X	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3280	.3012	.2725	.2426	.2119	.1807	.1493	.1180	.0871	.0568
1	.3483	.3614	.3743	.3862	.3971	.4070	.4160	.4241	.4314	.4379
2	.2014	.2160	.2303	.2441	.2574	.2701	.2823	.2940	.3052	.3159
3	.0728	.0867	.0996	.1116	.1226	.1327	.1419	.1503	.1579	.1647
4	.0203	.0280	.0354	.0426	.0497	.0567	.0636	.0703	.0768	.0831
5	.0045	.0082	.0118	.0154	.0189	.0224	.0259	.0294	.0329	.0364
6	.0008	.0013	.0018	.0023	.0028	.0033	.0038	.0043	.0048	.0053
7	.0001	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

X	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1235	.1108	.1003	.0907	.0821	.0743	.0673	.0608	.0549	.0496
1	.2572	.2438	.2306	.2177	.2052	.1931	.1815	.1703	.1596	.1494
2	.2700	.2681	.2652	.2613	.2565	.2510	.2450	.2384	.2314	.2240
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2178	.2205	.2223	.2237	.2246
4	.0923	.1082	.1168	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1680
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1006
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0139	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0013	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

X	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0480	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1860	.1893	.1921	.1944	.1964	.1981	.1994
5	.1073	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0553	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0990	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0269	.0298
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0087	.0098	.0110	.0122

Table E.6

TABLE OF POISSON PROBABILITIES

For a given value of μ , entry indicates the probability of obtaining a specified value of X

X	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	.9048	.8187	.7408	.6703	.6065	.5488	.4966	.4493	.4066	.3679
1	.0905	.1637	.2522	.3581	.4833	.6302	.8034	.9034	.9534	.9679
2	.0045	.0164	.0333	.0536	.0758	.0998	.1217	.1438	.1647	.1839
3	.0002	.0011	.0033	.0072	.0126	.0196	.0284	.0383	.0494	.0613
4	.0000	.0001	.0008	.0027	.0056	.0093	.0139	.0197	.0268	.0353
5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0007	.0012	.0020	.0031
6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0003	.0005
7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

X	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	.3229	.3012	.2725	.2456	.2231	.2019	.1827	.1653	.1496	.1353
1	.3682	.3514	.3343	.3182	.3030	.2887	.2753	.2636	.2534	.2447
2	.2014	.2169	.2303	.2417	.2510	.2584	.2640	.2678	.2700	.2707
3	.0738	.0867	.0986	.1098	.1205	.1308	.1406	.1500	.1591	.1679
4	.0203	.0260	.0324	.0393	.0471	.0551	.0636	.0723	.0812	.0902
5	.0045	.0062	.0084	.0111	.0141	.0176	.0216	.0260	.0309	.0361
6	.0008	.0012	.0018	.0026	.0035	.0047	.0061	.0078	.0098	.0120
7	.0001	.0002	.0003	.0005	.0008	.0011	.0015	.0020	.0027	.0034
8	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0003	.0005	.0006	.0009
9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002

X	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	.1225	.1108	.1003	.0907	.0821	.0742	.0672	.0608	.0550	.0498
1	.2672	.2438	.2206	.2007	.1832	.1681	.1553	.1446	.1359	.1291
2	.2700	.2681	.2632	.2563	.2485	.2400	.2308	.2214	.2124	.2040
3	.1890	.1966	.2033	.2090	.2138	.2176	.2205	.2225	.2237	.2240
4	.0992	.1082	.1169	.1254	.1336	.1414	.1488	.1557	.1622	.1683
5	.0417	.0476	.0538	.0602	.0668	.0735	.0804	.0872	.0940	.1008
6	.0146	.0174	.0206	.0241	.0278	.0319	.0362	.0407	.0455	.0504
7	.0044	.0055	.0068	.0083	.0099	.0118	.0138	.0163	.0188	.0216
8	.0011	.0015	.0019	.0025	.0031	.0038	.0047	.0057	.0068	.0081
9	.0003	.0004	.0005	.0007	.0009	.0011	.0014	.0018	.0022	.0027
10	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0008
11	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
12	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

X	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	.0450	.0408	.0369	.0334	.0302	.0273	.0247	.0224	.0202	.0183
1	.1397	.1304	.1217	.1135	.1057	.0984	.0915	.0850	.0789	.0733
2	.2165	.2087	.2008	.1929	.1850	.1771	.1692	.1615	.1539	.1465
3	.2237	.2226	.2209	.2186	.2158	.2125	.2087	.2046	.2001	.1954
4	.1734	.1781	.1823	.1860	.1898	.1932	.1961	.1984	.1999	.1999
5	.1075	.1140	.1203	.1264	.1322	.1377	.1429	.1477	.1522	.1563
6	.0555	.0608	.0662	.0716	.0771	.0826	.0881	.0936	.0991	.1042
7	.0246	.0278	.0312	.0348	.0385	.0425	.0466	.0508	.0551	.0595
8	.0095	.0111	.0129	.0148	.0169	.0191	.0215	.0241	.0268	.0294
9	.0033	.0040	.0047	.0056	.0066	.0076	.0089	.0102	.0116	.0132

Table E.6 (Continued)[illegible]

X	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5.0
0	.0106	.0130	.0136	.0123	.0111	.0091	.0091	.0082	.0074	.0067
1	.0079	.0090	.0083	.0040	.0050	.0042	.0427	.0295	.0365	.0337
2	.1263	.1322	.1254	.1180	.1125	.1083	.1005	.0948	.0864	.0842
3	.1864	.1832	.1798	.1743	.1687	.1631	.1574	.1517	.1460	.1404
4	.1861	.1944	.1923	.1917	.1868	.1878	.1848	.1820	.1789	.1765
5	.1609	.1633	.1602	.1587	.1508	.1525	.1536	.1547	.1553	.1555
6	.1092	.1142	.1191	.1237	.1281	.1323	.1362	.1398	.1432	.1463
7	.0640	.0686	.0732	.0778	.0824	.0869	.0914	.0959	.1002	.1044
8	.0228	.0260	.0293	.0328	.0363	.0399	.0437	.0475	.0514	.0553
9	.0110	.0108	.0128	.0209	.0222	.0256	.0280	.0307	.0334	.0363
10	.0061	.0071	.0081	.0082	.0104	.0118	.0132	.0147	.0164	.0181
11	.0022	.0027	.0032	.0037	.0043	.0049	.0056	.0064	.0073	.0082
12	.0008	.0009	.0011	.0014	.0016	.0019	.0022	.0026	.0030	.0034
13	.0002	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0012
14	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0005
15	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002

X	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6.0
0	.0001	.0055	.0050	.0045	.0041	.0037	.0033	.0030	.0027	.0025
1	.0011	.0267	.0265	.0244	.0225	.0207	.0191	.0176	.0162	.0149
2	.0795	.4746	.4701	.4650	.4618	.4580	.4544	.4509	.4477	.4446
3	.1341	.1293	.1239	.1185	.1133	.1082	.1033	.0985	.0938	.0892
4	.1719	.1681	.1641	.1600	.1558	.1515	.1472	.1428	.1383	.1339
5	.1753	.1748	.1746	.1728	.1714	.1697	.1678	.1656	.1632	.1606
6	.1480	.1515	.1537	.1555	.1571	.1584	.1594	.1601	.1605	.1606
7	.1096	.1125	.1163	.1200	.1234	.1267	.1298	.1326	.1353	.1377
8	.0682	.0731	.0771	.0810	.0849	.0887	.0925	.0962	.0998	.1033
9	.0383	.0433	.0454	.0486	.0519	.0552	.0586	.0620	.0654	.0688
10	.0200	.0220	.0241	.0263	.0285	.0309	.0334	.0359	.0386	.0413
11	.0093	.0104	.0116	.0128	.0143	.0157	.0173	.0190	.0207	.0225
12	.0030	.0046	.0061	.0076	.0090	.0073	.0082	.0092	.0102	.0113
13	.0015	.0018	.0021	.0024	.0026	.0032	.0036	.0041	.0046	.0052
14	.0006	.0007	.0008	.0009	.0011	.0013	.0015	.0017	.0019	.0022
15	.0002	.0003	.0003	.0003	.0004	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009
16	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003
17	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001

Table E.6 (Continued)

X	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7.0
0	.0022	.0020	.0018	.0017	.0015	.0014	.0013	.0011	.0010	.0008
1	.0137	.0129	.0118	.0106	.0098	.0090	.0082	.0076	.0070	.0064
2	.0417	.0390	.0364	.0340	.0318	.0296	.0276	.0258	.0240	.0223
3	.0848	.0806	.0765	.0726	.0688	.0652	.0617	.0584	.0552	.0521
4	.1294	.1249	.1205	.1162	.1118	.1076	.1034	.0992	.0952	.0912
5	.1879	.1840	.1810	.1787	.1764	.1740	.1718	.1696	.1674	.1652
6	.2605	.2561	.2519	.2486	.2452	.2420	.2388	.2356	.2324	.2292
7	.3499	.3448	.3398	.3348	.3298	.3248	.3198	.3148	.3098	.3048
8	.4566	.4509	.4452	.4395	.4338	.4281	.4224	.4167	.4110	.4053
9	.5823	.5759	.5695	.5631	.5567	.5503	.5439	.5375	.5311	.5247
10	.7291	.7219	.7147	.7075	.7003	.6931	.6859	.6787	.6715	.6643
11	.8984	.8901	.8818	.8735	.8652	.8569	.8486	.8403	.8320	.8237
12	1.0927	1.0834	1.0741	1.0648	1.0555	1.0462	1.0369	1.0276	1.0183	1.0090
13	1.3241	1.3138	1.3035	1.2932	1.2829	1.2726	1.2623	1.2520	1.2417	1.2314
14	1.6059	1.5946	1.5833	1.5720	1.5607	1.5494	1.5381	1.5268	1.5155	1.5042
15	2.0516	2.0393	2.0270	2.0147	2.0024	1.9901	1.9778	1.9655	1.9532	1.9409
16	2.5751	2.5618	2.5485	2.5352	2.5219	2.5086	2.4953	2.4820	2.4687	2.4554
17	3.1904	3.1761	3.1618	3.1475	3.1332	3.1189	3.1046	3.0903	3.0760	3.0617
18	3.9117	3.8964	3.8811	3.8658	3.8505	3.8352	3.8199	3.8046	3.7893	3.7740
19	4.7530	4.7367	4.7204	4.7041	4.6878	4.6715	4.6552	4.6389	4.6226	4.6063
20	5.7283	5.7110	5.6937	5.6764	5.6591	5.6418	5.6245	5.6072	5.5899	5.5726
21	6.8516	6.8333	6.8150	6.7967	6.7784	6.7601	6.7418	6.7235	6.7052	6.6869
22	8.1279	8.1086	8.0893	8.0699	8.0506	8.0313	8.0120	7.9927	7.9734	7.9541
23	9.5612	9.5409	9.5206	9.4999	9.4796	9.4593	9.4390	9.4187	9.3984	9.3781
24	11.1565	11.1352	11.1139	11.0926	11.0713	11.0500	11.0287	11.0074	10.9861	10.9648
25	12.9188	12.8965	12.8742	12.8519	12.8296	12.8073	12.7850	12.7627	12.7404	12.7181
26	14.8531	14.8308	14.8085	14.7862	14.7639	14.7416	14.7193	14.6970	14.6747	14.6524
27	16.9644	16.9411	16.9178	16.8945	16.8712	16.8479	16.8246	16.8013	16.7780	16.7547
28	19.2567	19.2324	19.2081	19.1838	19.1595	19.1352	19.1109	19.0866	19.0623	19.0380
29	21.7350	21.7097	21.6844	21.6591	21.6338	21.6085	21.5832	21.5579	21.5326	21.5073
30	24.4043	24.3780	24.3517	24.3254	24.2991	24.2728	24.2465	24.2202	24.1939	24.1676
31	27.2706	27.2433	27.2160	27.1887	27.1614	27.1341	27.1068	27.0795	27.0522	27.0249
32	30.3399	30.3116	30.2833	30.2550	30.2267	30.1984	30.1701	30.1418	30.1135	30.0852
33	33.6182	33.5889	33.5596	33.5303	33.5010	33.4717	33.4424	33.4131	33.3838	33.3

Table E.6 (Continued)

X	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9.0
0	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001
1	.0025	.0023	.0021	.0019	.0017	.0016	.0014	.0013	.0012	.0011
2	.0100	.0092	.0086	.0079	.0074	.0068	.0063	.0058	.0054	.0050
3	.0289	.0282	.0277	.0272	.0268	.0196	.0183	.0171	.0160	.0150
4	.0544	.0517	.0491	.0466	.0443	.0420	.0398	.0377	.0357	.0337
5	.0882	.0849	.0816	.0784	.0753	.0722	.0692	.0663	.0635	.0607
6	.1191	.1160	.1128	.1097	.1066	.1034	.1003	.0972	.0941	.0911
7	.1378	.1356	.1338	.1317	.1294	.1271	.1247	.1222	.1197	.1171
8	.1595	.1592	.1388	.1382	.1375	.1366	.1356	.1344	.1332	.1318
9	.1556	.1269	.1280	.1290	.1299	.1306	.1311	.1315	.1317	.1316
10	.1617	.1640	.1663	.1684	.1704	.1723	.1740	.1757	.1772	.1786
11	.0749	.0776	.0802	.0828	.0853	.0878	.0902	.0925	.0948	.0970
12	.0805	.0830	.0855	.0879	.0904	.0929	.0954	.0979	.0703	.0728
13	.0815	.0834	.0854	.0874	.0895	.0916	.0938	.0959	.0981	.0904
14	.0182	.0198	.0210	.0225	.0240	.0256	.0272	.0289	.0306	.0324
15	.0998	.0107	.0116	.0126	.0136	.0147	.0158	.0169	.0182	.0194
16	.0080	.0065	.0060	.0066	.0072	.0079	.0086	.0093	.0101	.0109
17	.0024	.0026	.0029	.0033	.0036	.0040	.0044	.0048	.0053	.0058
18	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019	.0021	.0024	.0026	.0029
19	.0005	.0005	.0006	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014
20	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0005	.0006
21	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003
22	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001

X	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0000
1	.0010	.0009	.0009	.0008	.0007	.0007	.0006	.0005	.0005	.0005
2	.0046	.0043	.0040	.0037	.0034	.0031	.0029	.0027	.0025	.0023
3	.0140	.0131	.0123	.0115	.0107	.0100	.0093	.0087	.0081	.0076
4	.0319	.0302	.0285	.0269	.0254	.0240	.0226	.0213	.0201	.0189
5	.0581	.0555	.0530	.0506	.0483	.0460	.0439	.0418	.0398	.0378
6	.0881	.0851	.0822	.0793	.0764	.0736	.0709	.0682	.0656	.0631
7	.1145	.1118	.1091	.1064	.1037	.1010	.0982	.0955	.0928	.0901
8	.1382	.1356	.1330	.1304	.1278	.1252	.1226	.1199	.1173	.1146
9	.1517	.1491	.1465	.1439	.1413	.1387	.1361	.1335	.1309	.1283
10	.1798	.1770	.1743	.1716	.1689	.1662	.1635	.1608	.1581	.1554
11	.0991	.1012	.1031	.1049	.1067	.1083	.1098	.1112	.1125	.1137
12	.0782	.0776	.0769	.0762	.0754	.0746	.0738	.0729	.0720	.0711
13	.0636	.0649	.0662	.0674	.0687	.0699	.0711	.0722	.0732	.0742
14	.0542	.0561	.0580	.0599	.0619	.0638	.0656	.0674	.0691	.0708
15	.0308	.0321	.0335	.0350	.0364	.0377	.0391	.0404	.0417	.0430
16	.0118	.0127	.0137	.0147	.0157	.0168	.0179	.0190	.0200	.0211
17	.0063	.0069	.0075	.0081	.0086	.0091	.0096	.0101	.0106	.0111
18	.0032	.0035	.0039	.0042	.0046	.0050	.0053	.0056	.0059	.0061
19	.0015	.0017	.0019	.0021	.0023	.0025	.0027	.0029	.0031	.0033

Table E.6 (Continued)

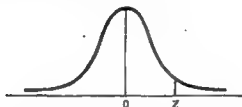
X	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
20	.0007	.0008	.0009	.0010	.0011	.0012	.0014	.0015	.0017	.0019
21	.0003	.0003	.0004	.0004	.0005	.0006	.0006	.0007	.0008	.0009
22	.0001	.0001	.0002	.0002	.0002	.0002	.0003	.0003	.0004	.0004
23	.0000	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0001	.0002	.0002
24	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0001
X	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
1	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
2	.0010	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000
3	.0037	.0018	.0008	.0004	.0002	.0001	.0000	.0000	.0000	.0000
4	.0102	.0053	.0027	.0013	.0006	.0003	.0001	.0001	.0000	.0000
5	.0224	.0127	.0070	.0037	.0019	.0010	.0005	.0002	.0001	.0001
6	.0411	.0255	.0152	.0087	.0048	.0028	.0014	.0007	.0004	.0002
7	.0846	.0437	.0281	.0174	.0104	.0060	.0034	.0018	.0010	.0006
8	.0888	.0655	.0457	.0304	.0194	.0120	.0073	.0042	.0024	.0013
9	.1065	.0874	.0681	.0473	.0324	.0213	.0135	.0083	.0050	.0029
10	.1194	.1048	.0859	.0663	.0486	.0341	.0230	.0150	.0095	.0058
11	.1194	.1144	.1015	.0844	.0663	.0496	.0355	.0245	.0164	.0106
12	.1094	.1144	.1099	.0864	.0829	.0661	.0504	.0368	.0259	.0176
13	.0926	.1056	.1099	.1060	.0956	.0814	.0658	.0509	.0378	.0271
14	.0728	.0905	.1021	.1080	.1024	.0830	.0690	.0555	.0414	.0387
15	.0534	.0724	.0885	.0989	.1024	.0992	.0904	.0786	.0650	.0516
16	.0367	.0543	.0719	.0868	.0960	.0992	.0963	.0884	.0772	.0646
17	.0237	.0383	.0560	.0713	.0847	.0934	.0963	.0936	.0863	.0760
18	.0145	.0256	.0397	.0554	.0706	.0830	.0909	.0936	.0911	.0844
19	.0084	.0181	.0272	.0409	.0567	.0690	.0814	.0887	.0911	.0888
20	.0046	.0097	.0177	.0286	.0418	.0560	.0692	.0796	.0866	.0888
21	.0024	.0055	.0109	.0191	.0299	.0426	.0560	.0684	.0783	.0846
22	.0012	.0030	.0065	.0121	.0204	.0310	.0433	.0560	.0676	.0769
23	.0006	.0016	.0037	.0074	.0133	.0216	.0320	.0438	.0559	.0669
24	.0003	.0008	.0020	.0043	.0083	.0144	.0226	.0328	.0442	.0557
25	.0001	.0004	.0010	.0024	.0050	.0092	.0154	.0237	.0336	.0446
26	.0000	.0002	.0005	.0013	.0029	.0057	.0101	.0164	.0246	.0343
27	.0000	.0001	.0002	.0007	.0016	.0034	.0062	.0109	.0173	.0254
28	.0000	.0000	.0001	.0003	.0009	.0019	.0038	.0070	.0117	.0181
29	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004	.0011	.0023	.0044	.0077	.0125
30	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0013	.0026	.0049	.0083
31	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007	.0015	.0030	.0054
32	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0004	.0009	.0018	.0034
33	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0010	.0020
34	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0006	.0012
35	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0007
36	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0004
37	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002
38	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001
39	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001

SOURCE: Extracted from William H. Beyes (ed.), *CRC Basic Statistical Tables* (Cleveland: The Chemical Rubber Co., 1971).

الجدول الثالث

التوزيع العادي المعياري

Table E.2
THE STANDARDIZED NORMAL DISTRIBUTION



Entry represents area under the standardized normal distribution from the mean to Z

[illegible]

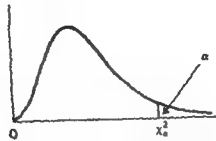
الجدول الرابع

توزيع t TABLE F The t -Distribution

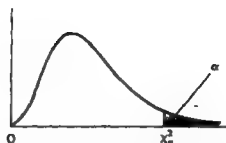
Two-tailed-Test	0.900	0.700	0.500	0.300	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010	α vs
	0.100	0.300	0.500	0.700	0.800	0.900	0.950	0.980	0.990	CL
One-tailed-Test	0.450	0.350	0.250	0.150	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	α vs
	0.550	0.650	0.750	0.850	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	CL
d.f.	Values of t									
1	0.158	0.510	1.000	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	
2	0.142	0.445	0.816	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	
3	0.137	0.424	0.765	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	
4	0.134	0.414	0.741	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	
5	0.132	0.408	0.727	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	
6	0.131	0.404	0.718	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	
7	0.130	0.402	0.711	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	
8	0.130	0.399	0.706	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	
9	0.129	0.398	0.703	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	
10	0.129	0.397	0.700	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	
11	0.129	0.396	0.697	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	
12	0.128	0.395	0.695	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	
13	0.128	0.394	0.694	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	
14	0.128	0.393	0.692	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	
15	0.128	0.393	0.691	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	
16	0.128	0.392	0.690	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	
17	0.128	0.392	0.689	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	
18	0.127	0.392	0.688	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	
19	0.127	0.391	0.688	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	
20	0.127	0.391	0.687	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	
21	0.127	0.391	0.686	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	
22	0.127	0.390	0.686	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	
23	0.127	0.390	0.685	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	
24	0.127	0.390	0.685	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	
25	0.127	0.390	0.684	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	
26	0.127	0.390	0.684	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	
27	0.127	0.389	0.684	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	
28	0.127	0.389	0.683	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	
29	0.127	0.389	0.683	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	
30	0.127	0.389	0.683	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	
40	0.126	0.388	0.681	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	
60	0.126	0.387	0.679	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	
120	0.126	0.386	0.677	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	
∞	0.126	0.385	0.674	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	

الجدول الخامس

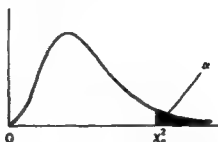
توزيع كاي "chi-square"



df	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.9}$	$\chi^2_{0.8}$	$\chi^2_{0.7}$	$\chi^2_{0.6}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.306
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672



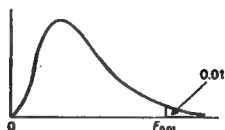
df	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.85}$	$\chi^2_{0.80}$	$\chi^2_{0.75}$	df
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879	1
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597	2
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838	3
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860	4
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750	5
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548	6
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278	7
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955	8
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589	9
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188	10
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757	11
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300	12
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819	13
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319	14
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801	15
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267	16
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718	17
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156	18
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582	19
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997	20
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401	21
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796	22
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181	23
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558	24
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928	25
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290	26
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645	27
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993	28
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.336	29
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672	30

Chi square distribution (Values of χ^2)

df	$\chi^2_{0.995}$	$\chi^2_{0.99}$	$\chi^2_{0.975}$	$\chi^2_{0.95}$	$\chi^2_{0.90}$	$\chi^2_{0.875}$	$\chi^2_{0.85}$	$\chi^2_{0.80}$
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.721	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672

للجدول العائد

نوع F

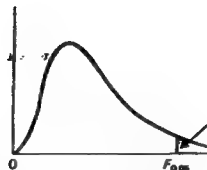


		df for numerator									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
df for denominator	1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	
	2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	
	3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	
	4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	
	5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	
	6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	
	7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	
	8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	
	9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	
	10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	
	11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	
	12	9.34	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	
	13	9.08	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	
	14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	
	15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	
	16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	
	17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	
	18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	
	19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	
	20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	
	21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	
	22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	
	23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	
	24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	
	25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	
	26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	
	27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	
	28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	
	29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	
	30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	
	40	7.51	5.38	4.51	4.03	3.71	3.49	3.32	3.19	3.09	
	50	7.48	5.36	4.50	4.01	3.69	3.47	3.30	3.17	3.07	
	60	7.45	5.34	4.49	4.00	3.68	3.46	3.29	3.16	3.06	
	70	7.43	5.33	4.48	3.99	3.67	3.45	3.28	3.15	3.05	
	80	7.41	5.32	4.47	3.98	3.66	3.44	3.27	3.14	3.04	
	90	7.40	5.31	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.03	
	100	7.39	5.30	4.45	3.96	3.64	3.42	3.25	3.12	3.02	

Table VI (continued)

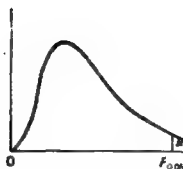
all for numerators											
20	22	25	28	24	30	40	60	120	∞		
6054	6066	6057	6209	6295	6261	6207	6313	6399	6366		
99.40	99.62	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50		1
27.23	27.85	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13		2
14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46		3
											4
10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02		5
7.87	7.22	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88		6
6.62	6.67	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65		7
5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86		8
5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31		9
4.05	4.71	4.96	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91		10
4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60		11
4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36		12
4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17		13
3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00		14
3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87		15
3.60	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75		16
3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65		17
3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57		18
3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49		19
3.37	3.25	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42		20
3.31	3.17	3.05	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36		21
3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31		22
3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26		23
3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21		24
3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17		25
3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13		26
3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10		27
3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06		28
3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.32	2.23	2.14	2.05		29
2.90	2.86	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01		30
2.80	2.86	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.83		40
2.65	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60		60
2.67	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38		120
2.52	2.10	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.08		∞

all for denominators

Table VII Values of $F_{\alpha, \alpha}$ 

		df for numerator							
		1	2	3	4	5	6	7	8
df for denominator	1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.9	236.8	238.9
	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37
	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77
	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70
	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64
	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59
	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55
	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51
	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48
	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45
	21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42
	22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40
	23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37
	24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36
	25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34
	26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32
	27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31
	28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29
	29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28
	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27
	40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18
	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10
	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02
	∞	3.84	3.00	2.60	2.57	2.21	2.10	2.01	1.94

Table VII Values of F_{α}



df for denominator	df for numerator							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94

الجدول السادس

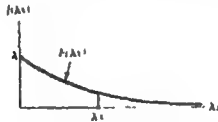
جدول الأعداد العشرية

63271	59986	71744	51102	15141	80714	58683	92108	13554	79945
88547	09896	95436	79115	18803	01041	20030	63754	08459	28364
55957	57243	83865	09911	19761	66535	40102	26646	60147	15702
46276	87453	44790	67122	45573	84118	21625	16999	13385	22782
55363	07449	34835	11190	76616	67191	12777	21861	68689	03363
69393	92785	49902	18887	47088	30378	87618	36933	40640	16281
13186	29431	88190	01188	38733	11290	89541	70290	40113	08243
17726	28652	56836	78351	47327	18118	92232	55201	27340	10493
36520	64465	05550	30157	02242	29520	69753	72602	23756	54935
81638	36100	39254	56835	37836	02421	98063	89641	64933	99337
84449	48948	75215	75498	19778	74240	03466	49292	36401	45525
63291	11618	12613	75055	43915	26488	41116	64531	56827	30825
70502	53225	03655	05915	37140	17051	48393	91322	25653	06543
06426	24771	59935	49801	11082	66762	94477	02494	88215	27191
70711	55609	29430	70165	45406	78484	31639	52009	18873	96927
41900	70538	77191	25860	55204	73417	83920	69468	74972	18712
74332	36618	76298	26678	89134	33938	95567	29380	75906	19807
71342	40118	57079	10526	09925	89773	41335	96344	29802	46453
53766	52875	14967	46962	67142	77592	57651	95508	80033	69828
90585	58955	53122	16025	84299	53310	67380	84249	25348	04332
12081	96293	17201	64516	51530	37069	40261	61374	95815	08714
62606	64324	46354	72157	67248	20139	49804	09226	84818	29497
10078	28071	85389	50324	14980	15562	64165	06125	71353	77669
91561	46145	24177	14294	10861	98124	75732	00815	81442	97355
13091	98112	53959	79607	52244	63303	10413	63839	74762	50289
72864	83014	72447	22682	08033	61714	88173	90835	08034	85169
66618	25467	48894	51041	02365	91726	09363	63167	95264	45643
81345	41042	29491	01836	09044	51926	43630	63470	76908	14194
44064	26805	84495	47407	13357	30412	33318	26098	82782	42851
54310	96175	47594	88616	42035	38093	36745	56702	40844	33514
14877	11088	10924	59013	61439	21882	42059	24177	58739	08170
78295	23179	02771	43464	39861	71411	05697	67194	30495	21157
67524	02865	34993	54278	04237	92441	26602	63835	36032	64770
88268	57219	68424	73455	83226	08710	64284	55005	84171	42596
97158	28672	50665	01181	24262	19427	52106	34308	73685	74246
04230	16831	69885	30802	65559	09205	71829	06489	85650	39787
94879	56606	30401	02602	57658	30091	54986	41384	60437	03195
71446	15232	66715	26385	98138	70566	02888	79941	39684	54315
22886	85644	70316	19619	08613	88407	17461	73925	53037	91084
62048	33711	25289	21526	02223	75947	66466	06232	10913	75116
84534	42351	21625	53669	81352	95152	08107	90814	72741	12649
84707	15865	84710	15666	06426	96111	32648	88141	79802	68861
19409	40666	84720	98961	13607	68491	52988	26374	64297	44945
57978	48018	29973	66777	44674	96144	24742	96702	84280	06182
57295	98298	13199	96410	74229	41680	47192	41267	14671	23142

الجدول الثامن

جدول للتوزيع الأسي

Values of $F(\lambda x)$ where X has the exponential distribution



λx	$F(\lambda x)$	λx	$F(\lambda x)$	λx	$F(\lambda x)$	λx	$F(\lambda x)$
0.0	0.0000	2.5	0.918	5.0	0.9933	7.5	0.99945
0.1	0.095	2.6	0.926	5.1	0.9939	7.6	0.99950
0.2	0.181	2.7	0.933	5.2	0.9945	7.7	0.99955
0.3	0.259	2.8	0.939	5.3	0.9950	7.8	0.99959
0.4	0.330	2.9	0.945	5.4	0.9955	7.9	0.99963
0.5	0.393	3.0	0.950	5.5	0.9959	8.0	0.99966
0.6	0.451	3.1	0.955	5.6	0.9963	8.1	0.99970
0.7	0.503	3.2	0.959	5.7	0.9967	8.2	0.99972
0.8	0.551	3.3	0.963	5.8	0.9970	8.3	0.99975
0.9	0.593	3.4	0.967	5.9	0.9973	8.4	0.99978
1.0	0.632	3.5	0.970	6.0	0.9975	8.5	0.99980
1.1	0.667	3.6	0.973	6.1	0.9978	8.6	0.99982
1.2	0.699	3.7	0.975	6.2	0.9980	8.7	0.99983
1.3	0.727	3.8	0.978	6.3	0.9982	8.8	0.99985
1.4	0.753	3.9	0.980	6.4	0.9983	8.9	0.99986
1.5	0.777	4.0	0.982	6.5	0.9985	9.0	0.99989
1.6	0.798	4.1	0.983	6.6	0.9986	9.1	0.99989
1.7	0.817	4.2	0.985	6.7	0.9988	9.2	0.99990
1.8	0.835	4.3	0.986	6.8	0.9989	9.3	0.99991
1.9	0.850	4.4	0.988	6.9	0.9990	9.4	0.99992
2.0	0.865	4.5	0.989	7.0	0.9991	9.5	0.99992
2.1	0.878	4.6	0.990	7.1	0.9992	9.6	0.99993
2.2	0.889	4.7	0.991	7.2	0.9993	9.7	0.99994
2.3	0.900	4.8	0.992	7.3	0.9993	9.8	0.99994
2.4	0.909	4.9	0.993	7.4	0.9993	9.9	0.99995

Example: If $\lambda = 16$, the probability of observing a value of X less than or equal to 2 is $F(\lambda x) = F[(16)(2)] = F(32) = 0.9995$.

الجدول التاسع


SQUARES, SQUARE ROOTS, AND RECIPROALS 1-1000

N	N²	√N	√10N	1/N .00
150	22 500	12.24745	38.72983	6666667
151	22 801	12.28821	38.85872	6622517
152	23 104	12.32883	38.98718	6578947
153	23 409	12.36932	39.11521	6535948
154	23 716	12.40967	39.24283	6493506
155	24 025	12.44990	39.37004	6451613
156	24 336	12.49000	39.49684	6410256
157	24 649	12.52996	39.62323	6369427
158	24 964	12.56981	39.74921	6329114
159	25 281	12.60952	39.87480	6289308
160	25 600	12.64911	40.00000	6250000
161	25 921	12.68858	40.12481	6211180
162	26 244	12.72792	40.24922	6172840
163	26 569	12.76715	40.37326	6134969
164	26 896	12.80625	40.49691	6097561
165	27 225	12.84523	40.62019	6060606
166	27 556	12.88410	40.74310	6024056
167	27 889	12.92285	40.86563	5988024
168	28 224	12.96148	40.98780	5952381
169	28 561	13.00000	41.10961	5917160
170	28 900	13.03840	41.23106	5882353
171	29 241	13.07670	41.35215	5847953
172	29 584	13.11483	41.47288	5813953
173	29 929	13.15285	41.59327	5780347
174	30 276	13.19091	41.71331	5747126
175	30 625	13.22876	41.83300	5714286
176	30 976	13.26650	41.95235	5681818
177	31 329	13.30413	42.07137	5649718
178	31 684	13.34166	42.19005	5617978
179	32 041	13.37909	42.30839	5586592
180	32 400	13.41641	42.42641	5555556
181	32 761	13.45362	42.54409	5524862
182	33 124	13.49074	42.66146	5494505
183	33 489	13.52775	42.77850	5464481
184	33 856	13.56466	42.89522	5434783
185	34 225	13.60147	43.01163	5405405
186	34 596	13.63818	43.12772	5376344
187	34 969	13.67479	43.24350	5347594
188	35 344	13.71131	43.35897	5319149
189	35 721	13.74773	43.47413	5291005
190	36 100	13.78405	43.58899	5263158
191	36 481	13.82027	43.70355	5235602
192	36 864	13.85641	43.81780	5208333
193	37 249	13.89244	43.93177	5181347
194	37 636	13.92839	44.04543	5154639
195	38 025	13.96424	44.15880	5128205
196	38 416	14.00000	44.27189	5102041
197	38 809	14.03567	44.38468	5076142
198	39 204	14.07125	44.49719	5050505
199	39 601	14.10674	44.60942	5025126
200	40 000	14.14214	44.72136	5000000

الجداول الإحصائية

تجميع

الأستاذ الدكتور/ عادل عبد الحميد عز

 Bibliotheca Alexandrina



0668957